

Math. P

145^{sub}

Math. P.

Fiedler

145^{ub}

143.11

**Die Methodik der darstellenden Geometrie zugleich als
Einleitung in die Geometrie der Lage.**

Von Dr. Wilhelm Fiedler,

Professor der darstellenden Geometrie am k. böhm. polytechnischen Landesinstitute zu Prag.

(Mit 3 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. März 1867.)

Aus dem LV. Bde. d. Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. II. Abth. Mai-Heft. Jahrg. 1867.

Math. L.
145 ub

Fiedler



Die Methodik der darstellenden Geometrie zugleich als Einleitung in die Geometrie der Lage.

Von Dr. Wilhelm Fiedler,

Professor der darstellenden Geometrie am k. böhm. polytechnischen Landesinstitute zu Prag.

(Mit 3 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. März 1867.)

1. Die practischen Ziele der darstellenden Geometrie bedingen, daß, als ihr allgemeiner Zweck die Bestimmung aller Raumformen durch andere räumliche Formen — Abbilder oder Nachbildungen von jenen — aufgefaßt werde. Das Abbild muß Lage, Form und Dimensionen des Abgebildeten angeben oder ihre Ermittlung gestatten.

Je nach Umständen dient diesem Zwecke die graphische Darstellung, d. h. die Abbildung auf einer ebenen (oder krummen) Fläche, oder das Modell, das räumliche Abbild.

Mit der Entwicklung der Mittel zur Erreichung dieses Zweckes werden die Mittel zur Ausführung aller Constructionen der Geometrie und zur Lösung ihrer Probleme gewonnen; die allgemeine Auffassung der dabei vermittelnden elementaren Prozesse gibt zugleich die natürlichste Grundlage für das System der reinen Geometrie.

2. Das mathematische Abstractum des Sehprocesses ist die nächste und natürlichste Quelle aller Abbildungsmethoden, weil jedes Abbild den Beschauer so deutlich als möglich an das Urbild erinnern soll. Darum sind bei dem Vorgange der Abbildung das Original und das Abbild in centraler oder perspectivischer Lage zu denken, d. h. die geraden Verbindungslinien der Punkte des einen mit den respective entsprechenden des andern gehen durch einen festen Punkt, das Centrum. Von dieser gegenseitigen Lage abgesehen und noch nach Aufhebung derselben sind Original und Abbild durch die beiden Gesetze verbunden, daß jedem Punkte des Originals ein Punkt des Abbildes und umgekehrt und jeder Geraden des Originals eine

Gerade des Abbildes und umgekehrt entspricht; man sagt, das Original und das Abbild sind projectivisch oder stehen in der Verwandtschaft der Projectivität.

3. Die graphische Darstellung in der Ebene entspricht der Voraussetzung, daß alle Punkte des Abbildes in einer Ebene — der durch die Zeichnungsebene repräsentirten Bildebene — gelegen seien; ihre Vereinigung heißt das Bild oder die Projection des Originals. Die geraden Linien vom Centrum der Projection nach den Punkten des Originals, welche durch ihre Schnitte mit der Bildebene die Projectionen jener Punkte bestimmen, heißen die projecirenden Strahlen und bilden in ihrer Gesamtheit das projecirende Strahlenbündel. Für ein in unendlicher Ferne gedachtes Centrum wird dasselbe zu einem Parallelenbündel. Jenes entspricht der Centralprojection, dieses der Parallelprojection, welche man wieder nach der Neigung der projecirenden Strahlen gegen die Bildebene in orthogonale und schiefe unterscheiden kann. Die Centralprojection genügt, als dem Vorgange des Sehens näher, den Anforderungen der Bildlichkeit im höheren Grade. Man gelangt von ihren Gesetzen durch Specialisirung zu denen der Parallelprojection, durch Verallgemeinerung aber zu jenen, welche die dem allgemeinen Zweck der darstellenden Geometrie entsprechenden Modellirungsmethoden beherrschen müssen.

Darum hat die Methodik der darstellenden Geometrie, die sich übrigens auf die geometrischen Elementarformen: die gerade Linie, den Punkt und die Ebene beschränken darf, in der Centralprojection den zweckmäßigsten Ausgangspunkt. An die Entwicklung der Methoden bei der Betrachtung der Elementarformen schließt sich dann die Anwendung derselben auf das Studium und die Darstellung der zusammengesetzten Formen an. Die Benützung aller Methoden und die Wahl der für die specielle Absicht zweckmäßigsten unter ihnen kann nur so schon für das Studium gesichert werden.

4. Das Centrum C , der Scheitel oder Träger des Strahlenbündels der projecirenden Geraden, werde auf die Bildebene, die wir als Tafelebene denken, durch die von ihm auf dieselbe gefällte Normale bezogen; der Fußpunkt c der letzteren heißt der Hauptpunkt, ihre Länge die Distanz, der mit ihr aus jenem in der Tafel beschriebene Kreis D der Distanzkreis (Fig. 1). Der nach einem Punkte

gehende projicirende Strahl — der Schein desselben — schneidet die Tafel im Bilde des Punktes. Umgekehrt bestimmt zwar jeder Punkt der Tafel den nach ihm gehenden projicirenden Strahl, aber unter den Punkten desselben kann nur der in unendlicher Ferne gelegene, d. i. die Richtung des Strahls, und der in der Bildebene gelegene als durch ihn bestimmt angesehen werden. Die von verschiedenen Punkten der Tafel ausgehenden projicirenden Strahlen können nach ihren Neigungswinkeln β gegen die Tafel unterschieden werden, die in einem rechtwinkligen Dreieck aus dem Abstand des Punktes vom Hauptpunkte und der Distanz als Katheten der letzteren gegenüberliegen, somit für die Punkte eines aus dem Hauptpunkte beschriebenen Kreises constant sind — mit ihnen auch die Länge der projicirenden Strahlen vom Centrum bis zur Tafel. Solche Kreise sollen Neigungskreise heissen.

5. Die Bilder aller Punkte einer Geraden geben das Bild der Geraden; die Gesammtheit ihrer projicirenden Strahlen bildet ein (ebenes) Strahlenbüschel und die projicirende Ebene oder den Schein der Geraden. Das Bild der Geraden ist daher eine Gerade. Jede Gerade in der Bildebene bestimmt eine projicirende Ebene mit dem Centrum. Sie bestimmt alle Strahlen des zu ihr gehörigen projicirenden Büschels, außer diesen aber nur noch zwei Gerade in der projicirenden Ebene, nämlich die in unendlicher Ferne, d. i. die Stellung der Ebene, und ihre Schnittlinie mit der Bildebene. Die projicirenden Ebenen können nach ihren Tafelneigungen α unterschieden werden, oder nach den Tafelneigungen derjenigen projicirenden Geraden in ihnen, deren Fußpunkt in der Tafel dem Centrum oder Hauptpunkte am nächsten liegt. Die Tafelneigung ist daher für alle diejenigen projicirenden Ebenen die nämliche, welche den Tangenten des nämlichen Neigungskreises entsprechen; mit ihr auch die Breite des Streifens der projicirenden Ebene, welcher zwischen der Bildebene und der zu ihr parallelen Ebene durch das Centrum oder der Verschwindungsebene liegt.

6. Unter den Geraden in derselben projicirenden Ebene, welche die nämliche Gerade zum Bilde haben, kann eine jede bestimmt werden, indem man die Bilder derjenigen Punkte in ihr angibt, welche durch ihre Projection allein bestimmt sind, d. h. ihren Durchstoßpunkt mit der Bildebene und das Bild ihres unendlich fernen Punktes oder den Durchstoßpunkt des zu ihr parallelen projicirenden

Strahls mit der Bildebene: das Bild einer Geraden, ihr Durchstoßpunkt σ und ihr Fluchtpunkt φ in demselben bestimmen die Gerade — nämlich das Bild die projicirende Ebene, der Durchstoßpunkt ein Strahlenbüschel in ihr, zu dem sie gehört, und der Fluchtpunkt den Strahl desselben, mit welchem sie zusammenfällt. Daraus ergibt sich die Tafelneigung der Geraden und ihre Länge zwischen Tafel und Verschwindungsebene als identisch mit den entsprechenden Größen des ihr parallelen projicirenden Strahles; die Entfernung ihres Schnittpunktes ν mit der Verschwindungsebene vom Centrum C als die Länge $\varphi\sigma$ in ihrem Bilde. Der Halbirungspunkt in der Strecke $\varphi\sigma$ ist das Bild desjenigen Punktes der Geraden, der in einer zur Tafel parallelen Ebene in der Entfernung der Distanz gelegen ist. Diese zweite Parallelebene, die Tafel und die Verschwindungsebene, trennen vier Strecken $\infty\mu$, $\mu\sigma$, $\sigma\nu$ und $\nu\infty$ der Originalgeraden von einander, denen die vier Strecken des Bildes $\varphi\mu'$, $\mu'\sigma$, $\sigma\infty$, $\infty\varphi$ entsprechen.

7. Durch die Umlegung der Geraden mit ihrer projicirenden Ebene in die Tafel wird der Zusammenhang zwischen Original und Bild einer solchen vollständig ersichtlich gemacht, — Projectivität in perspectivischer Lage. Wenn (C) das umgelegte Centrum ist, so ist die Parallele G zu $(C)\varphi$ durch σ die Umlegung der Geraden G' . Jeder Strahl eines Büschels vom Scheitel (C) schneidet G und G' in entsprechenden Punkten a' , a etc. (Fig. 2). Für ν als den Punkt der Geraden in der Verschwindungsebene ist $\Delta a\nu(C) \sim \Delta(C)\varphi a'$ und

$$a\nu : \nu(C) = (C)\varphi : \varphi a' \quad \text{oder} \quad a\nu \cdot \varphi a' = \nu(C) \cdot (C)\varphi = \sigma\nu \cdot \varphi\sigma,$$

d. i. das Product der Abstände eines Punktes im Original vom Verschwindungspunkte und seines Bildes vom Fluchtpunkte der Geraden ist für alle Punkte derselben Geraden constant ($=k^2$); es heißt die perspectivische Potenz der Geraden und die Punkte ν , φ heißen die Gegenpunkte resp. des Originals und des Bildes.

$$\text{Aus } \varphi a' = \frac{k^2}{a\nu}, \quad \varphi b' = \frac{k^2}{b\nu} \text{ folgt } a'b' = \frac{k^2}{a\nu \cdot b\nu} \cdot ab;$$

$$\text{insbesondere } a'\varphi = \frac{k^2}{a\nu}, \quad a'\sigma = \frac{k^2}{a\nu \cdot \sigma\nu} a\sigma \quad \text{oder} \quad a'\varphi : a'\sigma = \sigma\nu : a\sigma,$$

d. i. die Strecke $\varphi\sigma$ wird durch das Bild des Punktes in demselben Verhältniß getheilt, wie die Strecke νa in σ , oder im Verhältniß der

Distanz zum Tafelabstand des Punktes — ein Satz von zahlreichen Consequenzen. Die speciellen Relationen $a'b' = ab$ oder $d'\sigma = d\sigma$ (Fig. 3), lassen sich danach leicht construiren. Da k^2 nur von den Seiten $\sigma\nu$, $\varphi\sigma$ aber nicht von den Winkeln des Parallelogramms $\nu\sigma\varphi(C)$ abhängt, so gilt der Satz: Wenn zwei Gerade G , G' perspectivisch sind, so bleiben sie perspectivisch, auch wenn die eine von ihnen G um den Schnittpunkt beider gedreht wird, das Centrum bewegt sich dann in der Peripherie des aus φ mit $\varphi(C)$ als Halbmesser beschriebenen Kreises. Jeder Punkt dieses Kreises hat den Character und die Verwendung eines Theilungspunktes (Fig. 2).

8. Dieselben Relationen geben ferner

$$a'c' : b'c' = \frac{ac}{av} : \frac{bc}{bv} \text{ und } \frac{a'd'}{b'd'} = \frac{ad}{bd},$$

d. i. das Theilungsverhältniß einer endlichen Strecke wird durch Centralprojection stets, der Quotient zweier Theilungsverhältnisse derselben Strecke wird durch Projection nicht geändert. Diese constante Function heißt ein Doppelverhältniß von vier Punkten der Geraden. Weil man hat

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{\Delta aCc}{\Delta bCc} : \frac{\Delta aCd}{\Delta bCd} = \frac{Ca \cdot Cc \cdot \sin aCc}{Cb \cdot Cc \cdot \sin bCc} : \frac{Ca \cdot Cd \cdot \sin aCd}{Cb \cdot Cd \cdot \sin bCd} = \frac{\sin(A,C)}{\sin(B,C)} : \frac{\sin(A,D)}{\sin(B,D)},$$

so erkennt man den constanten Werth des Doppelverhältnisses von vier Punkten allen Projectionen gegenüber als den des Doppelverhältnisses des projicirenden Strahlenbüschels, welches ihr Schein ist.

Für $ac = -bc$ ist

$$a'c' : b'c' = \frac{k^2}{av \cdot cv} ac : \frac{k^2}{bv \cdot cv} bc = -bv : av = -\varphi a' : \varphi b',$$

also

$$\frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'\varphi}{b'\varphi} = -1,$$

d. h. der Gleichtheilung von ab in c entspricht die harmonische Theilung von $a'b'$ in c' und φ . Auch a , b , c und der unendlich ferne

Punkt des Originals bestimmen eine harmonische Theilung; dem entspricht die Construction harmonischer Theilungen und harmonischer Strahlenbüschel.

Für eine projicirende Gerade ist $k^2 = 0$; für eine Parallele zur Tafel $k^2 = \infty$ und zugleich $av = bv = \infty$, also $a'c' : b'c' = ac : bc$, d. h. Original und Bild sind projectivisch ähnlich, nach dem Verhältnisse der Abstände der Original- und Bildgeraden vom Centrum. Wenn diese Abstände gleich und entgegengesetzt sind, so sind die Geraden projectivisch gleich. Für ein unendlich fernes Centrum der Projection ist $k^2 = \infty$, $av = bv$, d. h. im Falle der Parallelprojection sind alle entsprechenden Geraden projectivisch ähnlich und wenn sie parallel sind, projectivisch gleich.

9. Zwei gerade Linien, die so auf einander bezogen sind, daß die eine als eine Centralprojection der andern angesehen werden kann, oder daß jedem Punkte der einen ein Punkt der andern entspricht und umgekehrt, heißen projectivisch; ebenso die sie bildenden Punktreihen. Für vier Punkte der einen und die entsprechenden Punkte der andern haben die gleich gebildeten Doppelverhältnisse einerlei Werth. In der speciellen Lage, in der solche Reihen beim Vorgang der Centralprojection erhalten werden, heißen sie perspectivisch. Beide Reihen haben dann einen Punkt entsprechend gemein und die geraden Verbindungslinien der entsprechenden Punktpaare gehen durch einen und denselben Punkt, beide Reihen sind Schnitte desselben Strahlenbüschels. Nach diesen Merkmalen kann man projectivische Reihen immer in perspectivische Lage bringen und wieder diese Lage gibt das einfachste Mittel, projectivische Reihen zu bilden. Sind a, b, c drei Punkte der einen und a', b', c' die entsprechenden der andern Reihe, so bestimmt die Relation

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'd'}{b'd'}$$

— schreiben wir abkürzend $\{abcd\} = \{a'b'c'd'\}$ — zu dem gegebenen Punkte d der ersten Reihe den entsprechenden Punkt d' der zweiten durch das demselben entsprechende Theilverhältniß $a'd' : b'd'$. Verschiebt man die eine der beiden Reihen so, daß ein Paar entsprechende Punkte a, a' zusammenfallen, so bestimmen die Geraden bb' und cc' , welche der neuen Lage entsprechen, den Scheitel t des

Büschels, aus welchem beide Reihen geschnitten sind, und td liefert den Punkt d' der zweiten Reihe. (Fig. 4).

Wenn über derselben Reihe a, b, c, d aus verschiedenen Scheiteln t, t' Strahlenbüschel gebildet werden, so ist

$$\{abcd\} = \{t.abcd\} = \{t'.abcd\},$$

wenn $t.abcd$ das Büschel aus t durch a, b, c, d bezeichnet. Bezeichnet man die entsprechenden Strahlenpaare durch $A, A'; B, B'$ etc.; so kann man schreiben $\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}$. Solche Büschel heißen perspectivisch; der ihre Scheitel verbindende Strahl ist beiden entsprechend gemein. Strahlenbüschel sind projectivisch, wenn sie in perspectivische Lage gebracht oder als Scheine derselben Punktreihe betrachtet werden können. Der vorher angegebene Characterzug gestattet die Herstellung der perspectivischen Lage und damit die einfachste Herstellung projectivischer Büschel. Drei Paare entsprechender Strahlen bestimmen dieselben.

Aufgabe: Man bestimme eine gerade Linie aus den Centralprojectionen von drei Punkten a, b, c in ihr und den respectiven Tafelabständen y_1, y_2, y_3 derselben. Sind a'', b'', c'' die Fußpunkte der letzteren, so ist für einen vierten Punkt d und seinen Tafelabstand $dd'' = y_4$ sowie β als Tafelneigung der Geraden

$$\begin{aligned} \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \{abcd\} &= \frac{(y_1 - y_3) \sin \beta}{(y_2 - y_3) \sin \beta} : \frac{(y_1 - y_4) \sin \beta}{(y_2 - y_4) \sin \beta} \\ &= \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} : \frac{y_1 - y_4}{y_2 - y_4} = \{a'b'c'd'\} = \{a''b''c''d''\}. \end{aligned}$$

Wenn man daher von einem Nullpunkte aus die Tafelabstände y_1, y_2, y_3 , nach Größe und Sinn in eine Gerade abträgt (Fig. 4), so bestimmen die drei Endpunkte eine zur Reihe der Bilder a', b', c' entsprechende projectivische Reihe und indem man für die den Ordinaten o, ∞ entsprechenden Punkte von jener die entsprechenden in dieser bestimmt, erhält man den Durchgangspunkt σ und den Fluchtpunkt φ der Geraden, die Punkte aber, die in der Ordinatenreihe dem Mittelpunkte von $\sigma\varphi$ und dem unendlich fernen Punkte derselben entsprechen, liefern durch ihre Abstände von o die Ordinaten der Punkte μ und ν der Geraden, d. h. $\pm D$. Erst die Hinzufügung der Tafelneigung β der Geraden und der Tafelneigung einer der projecirenden

Linien von a, b, c zu den Bedingungen der Aufgabe würde die Lage des Centrums bestimmen ¹⁾.

10. Wenn zwei gerade Linien G_1, G_2 durch denselben Punkt a gehen, so werden die Strecken $\sigma_1\varphi_1, \sigma_2\varphi_2$ in ihrem gemeinschaftlichen Punkte a' nach einerlei Verhältniß getheilt, d. h. die Geraden $\sigma_1\sigma_2$ und $\varphi_1\varphi_2$ sind einander parallel. Die erstere Gerade ist zugleich die Spur S der Ebene der beiden Geraden oder der Ort der Durchgangspunkte aller in dieser Ebene möglichen Geraden, und die letztere als der Ort ihrer Fluchtpunkte die Fluchtlinie F dieser Ebene. Durch Spur und Fluchtlinie ist jede Ebene bestimmt, man erhält sie als die durch die Spur gehende Parallelebene zu der durch das Centrum und die Fluchtlinie bestimmten Ebene (Fig. 5).

Jede in der Ebene liegende Gerade G ist durch ihr Bild G' bestimmt, weil in der Spur und der Fluchtlinie der Ebene resp. ihr Durchgangspunkt und ihr Fluchtpunkt liegen müssen. Das Bild eines Strahlenbüschels in der Ebene ist im Allgemeinen wieder ein Strahlenbüschel und umgekehrt; das eine der beiden Büschel bestimmt mit dem Projectionscentrum eine Schaar projicirender Ebenen, welche die projicirende Gerade des Scheitels gemein haben — wir sagen ein Ebenenbüschel; das andere Strahlenbüschel ist ein neuer ebener Schnitt desselben. Liegt der Scheitel des Originalbüschels in der Schnittlinie N seiner Ebene mit der Verschwindungsebene, so ist sein Bild ein Büschel von Parallelen; ist das Original ein Parallelenbüschel, so ist das Bild ein Strahlenbüschel, dessen Scheitel der gemeinsame Fluchtpunkt der Parallelen ist; liegt der Scheitel des Originalbüschels in der zweiten Parallelebene, so liegt der des Bildes in der Mittellinie M' zwischen Spur und Fluchtlinie seiner Ebene oder mitten zwischen Durchgangs- und Fluchtpunkt jedes seiner Strahlen.

Die unendlich ferne Gerade und die Parallelen N, S und M begrenzen auf der Originalebene vier Regionen, denen im Bilde die durch F , die unendlich ferne Gerade, S und M' begrenzten Regionen entsprechen. Die normale Breite des Streifens zwischen F und S im Bilde gibt den rechtwinkligen Abstand des Centrums von der Schnittlinie N der Ebene in der Verschwindungsebene an; darum decken sich in einer projicirenden Ebene Fluchtlinie und Spur.

¹⁾ Die Bestimmung der Geraden durch Durchgangs- und Fluchtpunkt bei gegebenem Centrum ist ein specieller Fall hiervon.

11. Ebenen von einerlei Fluchtlinie sind parallel und umgekehrt. Die Tafelneigung α der Ebene ist zugleich die der ihr parallelen projicirenden Ebene und ergibt sich daher nach §. 5 im Dreieck $ch(C)$; die Hypotenuse $h(C)$ desselben gibt die normale Breite der Streifen der Ebene an, welche zwischen den drei Parallelebenen des Systems, d. i. zwischen den Linien M , S und N gelegen sind; legt man daher in dem durch sie bestimmten Abstände Parallelen zu S auf beiden Seiten desselben, so geben diese die Lagen (N) und (M) an, in welche die Geraden N und M durch Umlegung der Ebene in die Tafel gelangen (Fig. 5). Man findet insbesondere: Ebenen, die sich in der Verschwindungsebene schneiden, haben parallele und äquidistante Spuren und Fluchtlinien; Ebenen, die sich in der zweiten Parallelebene schneiden, haben einerlei Mittellinie zwischen den respectiven Spuren und Fluchtlinien. Nach den Beziehungen der Fluchtlinie zu den Neigungskreisen löst man die Aufgaben: Man lege durch eine gegebene Gerade Ebenen von vorgeschriebener Tafelneigung α ; insbesondere also bei gegebener Spur S . Man ziehe auf einer gegebenen Ebene Gerade von vorgeschriebener Tafelneigung β .

12. Die Parallellinien und Parallelebenen zur Tafel bilden Ausnahmefälle von den entwickelten Bestimmungsweisen, weil ihre Durchgangs- und Fluchtelemente unangebbbar sind. Aber eine zur Bildebene parallele Ebene ist durch einen ihrer Punkte und dieser durch eine ihn enthaltende und nicht in der Ebene gelegene Gerade bestimmbar. Eine zur Bildebene parallele Gerade ist durch ihr Bild und einen in ihr gelegenen Punkt oder eine sie enthaltende Ebene bestimmt. Für die Punkte und Geraden der Verschwindungsebene genügt je die Angabe einer Geraden oder einer Ebene, in der sie liegen. Die Behandlung dieser Ausnahmefälle wird damit zur einfachen aber nützlichen Übung bei den durch das vorige lösbaren Aufgaben; z. B. man ziehe durch einen Punkt die Parallele zu einer gegebenen Geraden; man bestimme die gerade Verbindungslinie zwischen zwei gegebenen Punkten; man bestimme die Ebene von drei Punkten oder die Ebene durch eine Gerade parallel einer andern Geraden oder durch einen Punkt parallel zu zwei Geraden; man construiere die Schnittlinie zweier Ebenen oder den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene; man bestimme die Transversale zu zwei Geraden durch einen gegebenen Punkt oder parallel einer gegebenen Geraden.

13. Wenn eine projicirende Gerade und eine projicirende Ebene normal zu einander sind, so liegt der Durchgangspunkt σ der ersteren in dem vom Hauptpunkte c auf die Spur S der letzteren gefällten Perpendikel so, daß er mit dem Fußpunkte des letzteren die Hypotenuse eines am Projectionscentrum rechtwinkligen Dreieckes bestimmt. Die spitzen Winkel desselben sind die Tafelneigungen β und α der Geraden und der Ebene und es ist $c\varphi \cdot ch = D^2$ (Fig. 6). Weil alle Normalen einer Ebene parallel sind und alle Normalebene einer Geraden ebenso, so besteht dieselbe Relation zwischen dem Fluchtpunkt einer Geraden und der Fluchtlinie der zu ihr normalen Ebenen. Darnach construirt man die Normale einer Ebene durch einen gegebenen Punkt oder die Normalebene einer Ebene durch eine gegebene Gerade, die gemeinschaftliche Normale und die kürzeste Entfernung $s_1 s_2$ von zwei Geraden $\sigma_1 \varphi_1$, $\sigma_2 \varphi_2$ (Fig. 7).

14. Die Definitionen, nach denen die Winkel von Ebenen gegen einander und von Geraden gegen Ebenen auf Winkel zwischen geraden Linien reducirt werden, gestatten nach dem Vorigen die constructive Zurückführung aller Winkelgrößen auf Linienwinkel. Die Winkel zwischen zwei Geraden sind aber den am Centrum durch die Parallelstrahlen derselben gebildeten Winkeln gleich und man erhält dadurch die Umlegung der Winkel zweier Geraden $\sigma_1 \varphi_1$, $\sigma_2 \varphi_2$ mit ihrer Ebene S , F in die Tafel (Fig. 8). Denn für (C) als das mit der parallelen projicirenden Ebene in die Tafel umgelegte Centrum sind $(C)\varphi_1$, $(C)\varphi_2$ die Schenkel des umgelegten Winkels der Parallelstrahlen und daher die zu ihnen durch σ_1 , σ_2 gezogenen Parallelen die Schenkel (G_1) , (G_2) des mit seiner Ebene umgelegten Winkels. Verzeichnet man die Linie (N) der Ebene, die nach §. 11 ebenso weit und in demselben Sinne von der Spur entfernt ist, wie (C) von der Fluchtlinie, so sind die Schnittpunkte von (G_1) und (G_2) mit derselben die Gegenpunkte ν_1 , ν_2 der Schenkel und daher sind die Geraden $(C)\nu_1$, $(C)\nu_2$ respective zu G'_1 , G'_2 oder $\sigma_1 \varphi_1$, $\sigma_2 \varphi_2$ parallel. Das Bild a' und die Umlegung (a) des Scheitels des Winkels liegen mit dem umgelegten Centrum (C) in einer Geraden.

15. Nach dem Vorigen sind alle Aufgaben der Geometrie über die Elementarformen: Punkt, gerade Linie und Ebene lösbar unter der Voraussetzung geometrischer Genauigkeit auch bei schleifenden Schnitten etc., bei unbegrenzter Zeichnungsebene und abgesehen von

allen in Kleinheit der Constructionstheile etc. auftretenden Hindernissen der graphischen Durchführung. Durch Transformationen wird die Sicherung der Auflösung auch unter diesen Beschränkungen erreicht, d. h. durch Lagenveränderungen des Centrums, der Bildebene oder des Objects. Man kann das Centrum der Projection nach jedem beliebigen Punkte des Raumes verlegen und die Bildebene oder eine beliebige Ebene des Objects mit einer bestimmten Ebene zusammenfallen machen. Jede Verlegung des Centrums läßt sich aus einer Verrückung desselben in der Verschwindungsebene und einer solchen in der Tafelnormale zusammensetzen; in analoge Componenten zerlegen sich auch alle Parallelverschiebungen der Bildebene oder des Objects; ihre Drehungen sind davon getrennt zu betrachten.

16. Bei den Transformationen des Centrums bleiben die Durchgangselemente ungeändert, während das neue System der Fluchtelemente dem ursprünglichen congruent oder ähnlich und in ähnlicher Lage ist, je nachdem die Verschiebung des Centrums in der Verschwindungsebene oder in der Tafelnormale erfolgt. Im ersteren Falle wiederholen der Hauptpunkt c und alle Fluchtpunkte einfach nach Größe, Richtung und Sinn die Verschiebung des Centrums (Fig. 9); das Bild eines Punktes verschiebt sich in der gleichen Richtung bis in das transformirte Bild der Geraden, welche ihn bestimmt; projecirende Gerade verwandeln sich in solche, deren Bildlänge der Verschiebungsgröße gleich ist; jede beliebige Gerade kann zur projecirenden gemacht werden, indem man das Centrum nach ihrem Verschwindungspunkte v verlegt. Man kann zu einer Geraden in bekannter Ebene aber von unzugänglichem Fluchtpunkte Parallelen von gegebenen Durchgangspunkten ziehen, man kann die Entfernung des Centrums von einer bestimmten Ebene vergrößern, um eine auf ihr gelegene Figur deutlicher zu erhalten, man kann aus dem für das rechte Auge bestimmten Bilde einer Raumform das dem linken Auge entsprechende ableiten — Construction stereoskopischer Bilder —, etc.

Im zweiten Falle, (Fig. 10), verschiebt sich jeder Fluchtpunkt in der ihn mit dem Hauptpunkt verbindenden Geraden um einen Betrag, der in einem rechtwinkligen Dreiecke als zweite Kathete erhalten wird, das die Tafelneigung β des zugehörigen projecirenden Strahls zum anliegenden Winkel und die Verschiebung des Centrums

zur andern Kathete hat. Das Bild eines Punktes rückt in der Geraden fort, die es mit dem Hauptpunkte verbindet. Das Bild einer Tafelnormalen und die Bestimmung einer Normalebene zur Tafel bleiben ungeändert. Das Arbeiten mit reducirter Distanz ist dieser Transformation äquivalent.

17. Die Parallelverschiebungen des Objectes vollziehen sich durch Veränderungen der Durchgangselemente, welche den vorigen der Fluchtelemente genau analog sind. Die Parallelverschiebung des Objectes wird von allen Durchgangspunkten nach Größe, Richtung und Sinn wiederholt. Jede Gerade oder Ebene kann dadurch zu einer projecirenden gemacht oder umgekehrt vom Centrum mehr entfernt werden.

Bei der zur Tafel normalen Verschiebung bleibt jede Gerade in der zur Tafel normalen Ebene, die sie enthält, und ihr Durchgangspunkt rückt in der Spur derselben um einen Betrag fort, der in einem rechtwinkligen Dreiecke aus der Größe der Verschiebung als einer Kathete und der Tafelneigung der Geraden als gegenüberliegendem Winkel die zweite Kathete ist. Es ist die Verschiebung des Fluchpunktes im zweiten Falle des §. 16.

18. Die Verschiebung der Bildebene in sich selbst gibt nur eine Verlegung der Zeichnung oder eines Theiles derselben in der Tafel. Die Verschiebung nach Normalen zur Tafel, (Fig. 11), ändert sowohl die Durchgangs- als die Fluchtelemente und zwar werden beide um den nämlichen wie vorher aus Verschiebungsgröße und Tafelneigung abzuleitenden Betrag in gleicher Richtung und gleichem Sinne verschoben, so daß jedes Fluchtelement in gerader Linie mit dem Hauptpunkt verbleibt; denn die Gerade selbst, der zu ihr parallele projecirende Strahl und die projecirende Ebene sowie die zur Tafel normale Ebene durch sie verändern sich nicht. Die Bildlänge $\sigma\rho$ einer Geraden und die Bildbreite SF einer Ebene bleiben ungeändert. Man kann mit Hilfe dessen jeden beliebigen Punkt einer Geraden zu ihrem Durchstoßpunkt machen, jede Parallele zur Tafel in sie hinein verlegen, die Distanz reduciren etc.

Bei den Transformationen durch Normalverschiebung liegt das Paar der Geraden, welche das ursprüngliche und das transformirte Bild einer solchen als gleichzeitig gedacht repräsentiren, in einer Normalebene zur Tafel. Ist bei der letzten Transformation, (Fig. 11), insbesondere S_1 eine Parallele zur Tafel, die in der transformirten

Geraden den Punkt a^* , in der ursprünglichen den Punkt b' bestimmt, so entspricht dem Punkte a^* der Punkt a' der letzteren, und da $a'a^*$ der Verschiebungsgröße der Tafel gleich und zu a^*b' rechtwinklig ist, so kann hierdurch das Dreieck $a'a^*b'$ umgelegt und in seiner wahren Gestalt dargestellt werden. Diese Betrachtungen führen wiederholt auf die Normalebenen zur Tafel als besonders günstig für die constructive Behandlung. Da die Ausmessung der zu projicirenden Raumformen praktisch mit Vortheil nach der Coordinatenmethode geschieht, so ist es bequem die als Verticalebene gedachte Tafel und die Horizontalebene als natürliche Coordinatenebenen zu betrachten und in ihrer Schnittlinie den Anfangspunkt fest zu setzen. Denkt man das System der Fußpunkte der Coordinaten in einer der festen Ebenen perspectivisch dargestellt, so ist dann die Schaar der zugehörigen Normalen dieser Ebene zu verzeichnen und sind in ihnen die gemessenen Längen abzutragen. Das System der der Tafel selbst angehörigen Coordinatenfußpunkte erfordert nur die Auftragung der Coordinaten als Tafelnormalen nach §. 7.¹⁾

19. Die Umlegung einer Ebene in die Tafel oder die Überführung der Tafel in die Lage einer gegebenen Ebene endlich knüpft sich unmittelbar an die in §. 14 entwickelte Beziehung für den Winkel von zwei Geraden an. Zu allen Punkten und Geraden des Bildes erhält man wie dort die entsprechenden Punkte und Geraden des Originals und umgekehrt. Beide Systeme sind characterisirt durch das Gesetz, daß jedem Punkte und jeder Geraden des einen Systems respective ein Punkt und eine Gerade des andern Systems entspricht und umgekehrt; als ihm unterworfen heißen sie nach Steiner und Möbius projectivisch oder collinear im Allgemeinen, Chasles nennt sie homographisch. Überdieß aber erhält man sie hier in einer besonderen Lage, die man als die perspectivische oder concentrische Lage derselben zu bezeichnen pflegt: Jedes Paar entsprechender Punkte liegt auf einerlei Strahl eines Büschels, welches beiden Systemen entsprechend gemein ist und jedes Paar entsprechender Strahlen geht durch einerlei Punkt einer Reihe, welche beiden Systemen entsprechend, gemein ist. Der Träger jenes Büschels [Fig. 8, (C)] heißt das Collineationscentrum und der Träger dieser Reihe

¹⁾ Vergl. meine Programmschrift (1860): „Die Centralprojection als geometrische Wissenschaft“ §. 16, 17. Für das Frühere ibid. §§. 1—14.

(ibid. S) die Collineationsaxe. Die Geraden F und (N) , welche nach §. 7 in ganz gleicher Weise beim Übergang von einem System zum andern und umgekehrt zur Verwendung kommen, heißen die Gegenaxen der beiden collinearverwandten Systeme. Die Axe und das Centrum der Collineation mit einer der Gegenaxen bestimmen die collinearen, centriscch gelegenen Systeme, in Übereinstimmung mit der Herkunft derselben aus der Centralprojection des ebenen Systems. Centrum, Axe und ein Paar entsprechender Punkte würden zur Bestimmung auch hinreichen; die Gegenaxen würde man als Orte der Scheitel derjenigen Strahlenbüschel beider Systeme erhalten, denen Parallelenschaaren des jedesmaligen andern Systems entsprechen. Diese Zusammenhänge entsprechen ganz dem perspectivischen Zusammenhang der ebenen Systeme im Raum (§. 4, 5.) Der am Schlusse des §. 7 gegebene Satz für perspectivische Gerade erweitert sich direct auf projectivische Ebenen: Zwei ebene perspectivische Systeme bleiben perspectivisch, wenn man das eine von ihnen um die Durchschnittslinie beider dreht; das Centrum der Projection beschreibt dabei eine Kreisperipherie, die in der Fluchtlinie der Ebene ihren Mittelpunkt hat und zu ihr normal ist.

20. Die entsprechenden Geraden der centriscch collinearen Systeme sind projectivisch in perspectivischer Lage, die Gegenpunkte beider Reihen liegen in den Gegenaxen der Systeme. Das Strahlenbüschel, welches das Centrum zum Scheitel hat, genauer jeder seiner Strahlen, entspricht sich selbst, und ist aus der Übereinanderlagerung von zwei entsprechenden und gleichen Strahlenbüscheln des Original- und des Bildsystems entstanden, sowie die Collineationsaxe die Deckung und Vereinigung von zwei gleichen entsprechenden Reihen ist. Man erkennt die Existenz gleicher, Strahl für Strahl einander entsprechender Büschel in den perspectivischen Systemen direct wie folgt: sind H, H^* die Halbierungsebenen der von der Tafel mit der Originalebene gebildeten Flächenwinkel und werden auf sie vom Centrum der Projection aus die Normalen gefällt, welche die Originalebene in (C) und (C^*) und die Bildebene in $(\mathfrak{C})$ und $(\mathfrak{C}^*)$ respective schneiden; legt man dann durch die Normale $C(C)(\mathfrak{C})$ eine Ebene, welche die Originalebene in (G) und die Bildebene in G' schneidet und in der Schnittlinie S dieser beiden Ebenen den Durchgangspunkt σ dieser Geraden bestimmt, so ist $(C)\sigma = (\mathfrak{C})\sigma$

und für jedes Paar entsprechender Geraden aus (C) , $(\mathfrak{C})$, die in S den Punkt σ , gemein haben,

$$\Delta(C)\sigma\sigma_1 = \Delta(\mathfrak{C})\sigma\sigma_1, \text{ d. h. } \angle\sigma(C)\sigma_1 = \angle\sigma(\mathfrak{C})\sigma_1.$$

Dasselbe gilt für die zweite Halbirungsebene H^* und die zu ihr gefällte Normale. Beim Zusammenfallen der Original- und Bildebene vereinigen sich die Scheitel der entsprechend gleichen Büschel im Centrum der Collineation.

21. Nach den Regeln der Collineation in collinearer Lage ergeben sich zu jeder ebenen Figur die entsprechenden Figuren für jede Lage des Centrums, der Collineationsaxe und der Gegenaxe des gegebenen Systems. Je nach der Lage dieser Letzteren gegen die Originalfigur entsprechen derselben verschiedene Figuren, die man die Collinearverwandten der gegebenen Figur nennt und die eine durch gewisse allgemeine Eigenschaften — projectivische Eigenschaften der Figuren — mit der Originalfigur und unter sich verbundene Familie bilden. Das Dreieck und das Viereck bieten hinreichende Beispiele zur Erläuterung dessen. Jedes Viereck kann als Centralprojection eines Parallelogramms und noch specieller eines Quadrats angesehen werden. Sind (Figur 12) $a'b'c'd'$ seine Ecken e', f' die Schnittpunkte seiner Gegenseitenpaare $a'b', c'd'$ und $a'd', b'c'$ und g', h', k' die Schnittpunkte der Paare von Geraden $a'c', b'd'$; $a'c'$ mit $e'f'$, $b'd'$ mit $e'f'$, so wird das Original $abcd$ des Vierecks ein Parallelogramm für jede Centralprojection, für die die Gerade $c'f'h'k'$ die Gegenaxe seiner Ebene ist; es wird ein Rechteck insbesondere, wenn das umgelegte Centrum in dem über $e'f'$ als Durchmesser beschriebenen Kreise und ein Quadrat, wenn es zugleich in dem über hk' als Durchmesser beschriebenen Kreise liegt. Da aber Doppelverhältnisse von Punktreihen oder Strahlenbüscheln durch Centralprojection nicht geändert werden, so liefern die auf solche bezüglichen Eigenschaften des Quadrats solche des Vierecks überhaupt. Die Halbirung der Diagonalen gibt nach §. 8 die harmonische Theilung jeder derselben durch die beiden anderen, wenn $e'f'$ als die dritte Diagonale des Vierecks gilt. Ebenso gibt die Halbirung der Winkel der Diagonalen dort durch die Parallelen zu den Seiten die harmonische Theilung der Winkel von zwei Diagonalen des Vierecks durch die Geraden aus ihrem Schnittpunkt nach den Enden der dritten. Also:

die Endpunkte jeder Diagonale werden durch die beiden andern Diagonalen und zwei Diagonalen werden durch die Endpunkte der dritten Diagonale harmonisch getrennt.

22. Die Zusammenfassung des Bisherigen leitet zu allgemeinen Betrachtungen. Die Centralprojection der Grundformen: Punkt, Gerade und Ebene hat gleichmäßig auf zwei Processe geführt, die als die Bildung des Scheins und die Erzeugung des Schnittes bezeichnet werden können. Der Schein des Punktes ist der nach ihm gehende projicirende Strahl und der Schnitt des Letzteren mit der Tafel ist das Bild des Punktes; der Schein der Geraden ist das projicirende ebene Strahlenbüschel und der Schnitt desselben mit der Tafel ist ihr Bild; der Schein des ebenen Strahlenbüschels ist das projicirende Ebenenbüschel und der des Systems aller Geraden derselben Ebene das projicirende Ebenenbündel. Wenn man dazu die Anschauung fügt, daß der Schein einer Geraden aus einer Geraden das Büschel der Ebenen ist, welche die Punkte der ersten mit der letzteren bestimmen, so erhellt, daß die Punktreihe in einer Geraden, das Strahlenbüschel aus einem Punkte in einer Ebene und das Ebenenbüschel durch eine Gerade ein abgeschlossenes System bilden, dessen einzelne Gebilde sich auseinander durch die Processe der Schein- oder Schnittbildung ohne Hinzutritt eines neuen Gebildes wiedererzeugen: Aus der Punktreihe in gerader Linie als Schein aus einem Punkte das ebene Strahlenbüschel, aus einer Geraden das Ebenenbüschel; aus dem Strahlenbüschel als Schein aus einem Punkte das Ebenenbüschel, als Schnitt mit einer Ebene die Punktreihe in gerader Linie; aus dem Ebenenbüschel durch Schnitt mit einer Ebene das Strahlenbüschel, mit einer Geraden die Punktreihe. Man nennt diese drei Gebilde die projectivischen Elementargebilde oder die Grundgebilde erster Stufe. Durch einfache Anwendungen des Fundamentalsatzes in §. 8 ergibt sich, daß das Gesetz der Gleichheit entsprechender Doppelverhältnisse je zwei dieser Gebilde verbindet, von denen das eine ein Schnitt oder Schein des andern ist, oder welche beide Schnitte oder Scheine oder je ein Schein und ein Schnitt des nämlichen dritten sind. Dem entsprechend übertragen wir die Bezeichnung als perspectivisch von Punktreihen und Strahlenbüscheln, die sich auf einander projiciren, oder von denen das letztere die erstere projicirt, auf die Punktreihe und das Ebenenbüschel,

welches sie aus einer beliebigen Geraden projecirt, auf die Strahlenbüschel, welche dieselbe Reihe aus verschiedenen Punkten auch derselben Ebene, auf die Ebenenbüschel, welche dasselbe Strahlenbüschel aus verschiedenen Punkten projeciren und auf die Punktreihen, welche Schnitte desselben Ebenenbüschels sind. Dieselben Gebilde heißen *projectivisch*, wenn sie in irgend einer andern gegenseitigen Lage gedacht werden; die Gleichheit der entsprechenden Doppelverhältnisse gibt dann Zeugniß von der vorherbestehenden oder der herstellbaren *perspectivischen* Beziehung.

23. Die Grundgebilde erster Stufe sind zugleich die natürlichen Grundgebilde der reinen Geometrie (§. 1), d. h. sie bieten den zweckmäßigsten Ausgangspunkt für die Untersuchung der Mannigfaltigkeit der Gestalten. Die Centralprojection des ebenen Systems gibt ihre ersten Zusammensetzungen; als ein System von geraden Linien, hat es zu seinem Schein das Bündel der projecirenden Ebenen derselben, als ein System von Punkten das Bündel der projecirenden Strahlen. Wie das ebene Strahlensystem die Vereinigung unendlich vieler Strahlenbüschel in derselben Ebene ist, deren jedes durch zwei Strahlen bestimmt wird, so ist sein Schein die Vereinigung unendlich vieler Ebenenbüschel um denselben Punkt; wie das ebene Punktsystem die Vereinigung von unendlich vielen geraden Linien je durch zwei Punkte bestimmten Punktreihen in derselben Ebene ist, so ist sein Schein die von unendlich vielen ebenen Strahlenbüscheln aus demselben Punkte. Darum nennt man das ebene Punkt- und Strahlensystem und das punktförmige Ebenen- und Strahlenbündel die vier Grundgebilde zweiter Stufe.

In Weiterführung derselben Betrachtungsweise erscheint der Raum entweder als die Unendlichkeit seiner Punkte oder als die Unendlichkeit seiner Ebenen; als Punktsystem ist er die Vereinigung von unendlich vielen ebenen Punktsystemen, deren jedes durch drei beliebige Punkte bestimmt ist, als Ebenensystem die Vereinigung unendlich vieler Ebenenbündel, deren jedes durch drei beliebige Ebenen bestimmt ist. In beiderlei Hinsicht heißt er ein Gebilde dritter Stufe.

Betrachtet man aber endlich den Raum als die Unendlichkeit aller möglichen Geraden, so kann jede derselben als die Schnittlinie unendlich vieler Ebenen oder als die Reihe der unendlich

vielen in ihr gelegenen Punkte angesehen werden und da jede Ebene als Strahlensystem und jeder Punkt als Strahlensystem ein Gebilde zweiter Stufe ist, so erscheint jede Gerade des Raumes als ein Gebilde dritter Stufe und der Raum selbst, der sie alle enthält, somit als das Gebilde vierter Stufe. Dieser Aufbau des Systems der Geometrie zeigt, daß das mit Erkenntniß der projectivischen Zusammenhänge begonnene Studium der Gebilde erster Stufe die Grundlage aller weiteren Entwicklung ist.

24. Entsprechend den den Vorgang des Projicirens zusammensetzenden Operationen der Scheinbildung und des Schneidens zeigt sich in der ganzen Reihe der nun aus ihnen entwickelten Anschauungen der Gebilde und demgemäß überall in den geometrischen Untersuchungen eine Correspondenz zwischen dem Liegen in Geraden oder in Ebenen und dem Gehen durch Gerade oder durch Punkte, zwischen Punkt und Ebene, zwischen der Geraden als Verbindungslinie von Punkten und der Geraden als Schnittlinie von Ebenen. Die Gebilde der verschiedenen Stufen zeigen die Punkte einer Geraden, die Ebenen durch eine Gerade, und die Geraden aus einem Punkte in einer Ebene; die Geraden in einer Ebene und die durch einen Punkt, die Punkte in einer Ebene und die Ebenen durch einen Punkt, die Punkte und die Ebenen im Raum und die Geraden im Raum. Unter den Gebilden in einer Ebene findet Entsprechen zwischen dem Punkt und der Geraden, im Strahlen- und Ebenenbündel zwischen Strahl und Ebene statt. Dies Gesetz der Dualität tritt schon in den einfachsten Wahrheiten hervor: Ein Punkt und eine Gerade bestimmen eine Ebene, sowie eine Ebene und eine Gerade einen Punkt; drei Punkte bestimmen eine Ebene, wenn sie nicht in einer Geraden liegen und drei Ebene einen Punkt, wenn sie nicht durch eine Gerade gehen. Wenn von beliebig vielen Geraden jede zwei sich schneiden, aber nicht alle in einem Punkte, so liegen sie in einer Ebene, und wenn nicht alle in einer Ebene liegen, so gehen sie durch einen Punkt. Ebenso entsprechen sich die Probleme der Geometrie: Man construirt die Transversale von zwei Geraden aus einem gegebenen Punkte oder in einer gegebenen Ebene, indem man die Durchschnittslinie der von dem Punkte mit beiden Geraden bestimmten Ebenen im einen und die Verbindungslinie der von der Ebene mit beiden Geraden bestimmten Punkte im andern Falle construirt. Weil das Problem von den Trans-

versalen zu drei Geraden sich selbst entspricht, so vereinigen sich zu seiner Lösung beide vorher gegebenen Methoden.

25. Man pflegt die dualistisch entsprechenden Sätze, Definitionen und Probleme durch Nebeneinanderstellung zu characterisiren:

Zwei geradlinige Punktreihen sind perspectivisch, wenn sie Schnitte desselben Strahlenbüschels sind; entsprechende Punkte liegen auf einerlei Strahl desselben, der Schnittpunkt beider Geraden entspricht sich selbst.

Zwei ebene Systeme sind perspectivisch, wenn sie Schnitte des nämlichen Strahlen- oder Ebenenbündels sind; ihre entsprechenden Elemente liegen auf einerlei Strahl oder Ebene desselben, beide Systeme haben die Reihe in der Schnittlinie ihrer Ebenen entsprechend gemein.

Zwei Strahlenbüschel sind perspectivisch, wenn sie Scheine derselben Punktreihe sind; entsprechende Strahlen gehen durch einerlei Punkt derselben, die Verbindungslinie beider Scheitel entspricht sich selbst.

Zwei Strahlen- oder Ebenenbüschel sind perspectivisch, wenn sie Scheine desselben ebenen Systems sind, ihre entsprechenden Elemente gehen durch einerlei Gerade oder Punkte desselben, beide haben das Büschel der Ebenen aus der Verbindungslinie ihrer Scheitel entsprechend gemein.

Die Nothwendigkeit dieses Gesetzes der Dualität entspringt aus der Natur des Doppelverhältnisses (§. 8, 22), welches die projectivischen Beziehungen der Grundgebilde erster Stufe beherrscht; denn aus der Übertragbarkeit desselben von Reihen auf Büschel und umgekehrt¹⁾ folgt, daß mit dem Beweise eines Satzes über projectivische Beziehungen zugleich der Beweis des nach dem Gesetze der Dualität entsprechenden Satzes geliefert ist. Damit werden die Früchte der

¹⁾ Die Sätze dieser Übertragung sind selbst Beispiele für das Princip der Dualität:

Die Doppelverhältnisse aller Vierstrahlenbüschel, welche Scheine derselben vierpunktigen Reihe sind, haben mit den gleichgebildeten Doppelverhältnissen dieser Reihe dieselben Werthe.

Die Doppelverhältnisse aller Vierebenenbüschel, welche Scheine derselben vierpunktigen Reihe aus einer Geraden oder desselben vierstrahligen Büschels aus einem Punkte sind, haben mit den gleichgebildeten Doppelverhältnissen dieser Reihe oder dieses Büschels dieselben Werthe.

Die Doppelverhältnisse aller Vierpunktreihen, welche Schnitte desselben Vierstrahlenbüschels sind, haben mit den gleichgebildeten Doppelverhältnissen dieses Büschels dieselben Werthe.

Die Doppelverhältnisse aller Vierpunktreihen, welche Schnitte desselben Vierebenenbüschels mit einer Geraden oder desselben Vierstrahlenbüschels mit einer Ebene sind, haben mit den gleichgebildeten Doppelverhältnissen dieses Ebenen- oder Strahlenbüschels einerlei Werthe.

geometrischen Arbeit verdoppelt. Dies wird sich jedoch nicht auf Winkel- und Längenrelationen im Allgemeinen beziehen, weil und insoweit diese nicht projectivisch sind. Damit trennt sich das vom Gesetze der Dualität beherrschte Gebiet der Geometrie der Lage von dem der Geometrie des Maaßes. Daß die Grundlagen der letzteren als Specialisirungen gewisser allgemeiner Begriffe der Geometrie der Lage erkannt wurden, ist ein charakteristisches Ergebniß der Entwicklung (§. 49).

26. Das Studium der Gebilde erster Stufe, anknüpfend an §. 8, 9 ist auf das innigste mit der Untersuchung der perspectivischen ebenen Systeme (§. 19) verbunden und liefert zugleich eine vollständige und strenge Theorie der Curven und Kegelflächen zweiter Ordnung und Classe. Hierin sowie in weiteren Anwendungen ist es ein wichtiger Bestandtheil der darstellenden Geometrie.

Zwei projectivische Gebilde erster Stufe sind durch drei Paare entsprechender Elemente, z. B. die Punktpaare a, a', b, b', c, c' bestimmt; zu jedem vierten Elemente des einen d erhält man aus

$$\{abcd\} = \{a'b'c'd'\} \text{ durch } \frac{a'd'}{b'd'} = \frac{a'c'}{b'c'} \cdot \frac{ad}{bc} : \frac{ac}{bc}$$

das entsprechende Element d' des andern. Sind die projectivischen Reihen $abcde\dots, a'b'c'd'e'\dots$ oder T, T' nicht in perspectivischer Lage, so sind doch die Büschel, welche aus zwei entsprechenden Punkten der Reihen über der jedesmaligen andern Reihe gebildet werden, perspectivisch, weil

$$\{a.a'b'c'd'.. \} = \{a'.abcd\}$$

also aa' ihnen entsprechend gemeinsam ist; daher liegen die Schnittpunkte der Paare von Geraden $ab', a'b; ac', a'c; ad', a'd$ etc. in einer Geraden T'' (Fig. 13). Daß diese Gerade für die den verschiedenen anderen Paaren $b, b',$ etc. als Scheitel entsprechenden Büschel dieselbe ist, beweist man wie folgt. Man hat

$$\{a.a'b'c'c\} = \{b.a'b'c'c\}$$

und im Schnitte dieser Büschel mit den Geraden $a'c, b'c$ respective für r als Schnittpunkt von $ba', b'c$ und s als den von $ab', a'c$ projectivische Reihen

$$\{a'sb''c\} = \{rb'a''c\};$$

verbindet man aber die Punkte derselben mit dem Schnittpunkt c'' von ab' , $a'b$ und nennt man die Schnittpunkte von bc' , $b'c$ und von ca' , $c'a$ respective a'' und b'' , so sind in den projectivischen Büscheln $\{c''.a'sb''c\}$ und $\{c''.rb'a''c\}$ die drei Paare entsprechender Strahlen $c'a'$, $c'r$; $c's$, $c'b'$; $c''c$, $c''c$ zusammenfallend und es decken sich also auch die vierten $c''b''$ und $c''a''$. Von den drei Punkten a'' , b'' , c'' gehören aber b'' und c'' zu der Geraden T'' für die Büschel aus a , a' ; c'' und a'' zu der für die Büschel aus b , b' und a'' , b'' zu der für die Büschel aus a , a' ; also ist T'' für alle diese Büschel dieselbe Gerade.

Wenn man $ab'ca'bc'$ als ein den Geraden T , T' eingeschriebenes Sechseck betrachtet, so sind die Paare ab' , $a'b$; bc' , $b'c$; ca' , $c'a$ die Paare seiner Gegenseiten und die drei Schnittpunkte c'' , a'' , b'' derselben liegen in einer Geraden T'' . Dem Punkte d in T entspricht (Fig. 13) derjenige Punkt d' in T' , für welchen die Schnittpunkte der Geraden $a'd$ und ad' , also auch der von $b'd$ und bd' , etc. in der Geraden T' liegen. Dem gemeinschaftlichen Punkte beider Reihen, der als zu T gehörig p und als zu T' gehörig q' heißen mag, entsprechen die Schnittpunkte von T'' mit T' und T oder q und p' . Sind p' und q gegeben, so genügt ein weiteres Paar a , a' zur Bestimmung der projectivischen Reihen.

Bezeichnet man die Punkte durch u und r' , welche in jeder Reihe dem unendlich fernen Punkte der andern entsprechen, so ist für zwei Paar entsprechende Punkte

$$\{abu\infty\} = \{a'b'\infty r'\} \text{ oder } au \cdot a'r = bu \cdot b'r = \text{const.},$$

die Constanz des Productes der Abstände von den Gegenpunkten (§. 7), denn für die perspectivische Lage fallen r' , u auf φ , ν . Das Entsprechen der unendlich entfernten Punkte gibt

$$\{abc\infty\} = \{a'b'c'\infty\}, \text{ d. h. } ac:bc = a'c':b'c',$$

die Projectivität ist insbesondere Ähnlichkeit und $pq:p'q'$ ist das Ähnlichkeitsverhältniß; ist T'' einer der Halbirungslinien der Winke von T , T' parallel, so wird sie zur Gleichheit.

27. Drei Paare entsprechender Strahlen A , A' ; B , B' ; C , C' aus den Scheiteln t , t' (Fig. 14) bestimmen die zwei projectivischen Büschel derselben. Für D als vierten Strahl des ersten Büschels bestimmt sich D' als der entsprechende des zweiten durch das Theilver-

hältniß $\sin(A', D') : \sin(B', D')$. Die Punktreihen, welche auf zwei entsprechenden Strahlen A, A' vom jedesmaligen andern Büschel gebildet werden, sind perspectivisch ¹⁾, weil sie den Punkt (A, A') entsprechend gemein haben. Die Verbindungslinien C'', A'', B'' der Punktpaare $AB', A'B; BC', B'C; CA', C'A$ gehen durch einen Punkt t'' , der für alle die verschiedenen Reihen derselbe ist, die auf den verschiedenen Paaren entsprechender Strahlen entstehen. Sind R und S die Geraden von BA' nach $B'C$ und von AB' nach $A'C$ respective, so liefern die perspectivischen Reihen $\{A.A'B'C'C\}$ und $\{B.A'B'C'C\}$ durch Verbindung mit $A'C, B'C$ projectivische Büschel

$$\{A'SB''C\} = \{RB'A''C\}$$

und diese durch Schnitt mit C'' die projectivischen Reihen $\{C''.A'SB''C\}$ und $\{C''.RB'A''C\}$; da in denselben die drei Paare $C''A', C''R; C''S, C''B'; C''C, C''C$ identisch sind, so fallen auch $C''B''$ und $C''A''$ zusammen. $AB' CA' BC'$ kann als ein den Punkten t, t' umgeschriebenes Sechseit angesehen werden; die geraden Verbindungslinien der Paare seiner Gegenecken gehen durch einen Punkt. Die Strahlen D und D' der Büschel entsprechen einander, wenn die Paare $AD', A'D$ und ebenso $BD', B'D$ auf geraden Linien durch t'' liegen (Fig. 14), dem gemeinschaftlichen Strahl P, Q' beider Büschel entsprechen die Geraden tt' und $t't''$ als Q und P' . Sind sie gegeben, so genügt ein weiteres Paar entsprechender Strahlen zur Bestimmung der Büschel.

Die gewonnenen constructiven Methoden für die Vervollständigung projectivischer Grundgebilde kommen somit darauf hinaus, daß man beide Gebilde mit einem dritten derselben Art perspectivisch macht. (Vergl. §. 9.) Nach den Ergebnissen der Construction können projectivische Reihen und Büschel jederzeit durch eine Verschiebung des einen in seinem Träger — um pp' oder qq' respective — oder durch eine Drehung des einen um seinen Scheitel — um $\angle(P', Q')$

¹⁾ Allgemeiner sind nach dem §. 26 auch die Punktreihen perspectivisch, welche aus beiden Büscheln durch Strahlen geschnitten werden, die den Durchschnittspunkt eines Paares entsprechenden Strahlen enthalten. Und das Analoge gilt auch für projectivische Punktreihen, daß die über ihnen gebildeten Büschel perspectivisch sind, wenn ihre Scheitel der Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte angehören.

oder $\angle(P, Q)$ respective — in perspectivische Lage gebracht werden. In der perspectivischen Lage von zwei Büscheln erkennt man, daß sie stets zwei Paare von entsprechenden Strahlen $R, R', R^*, R^{*'}$ enthalten, welche im einen und im andern Büschel rechte Winkel $(R, R^*), (R', R^{*'})$ bilden; denn sie gehen nach den Schnittpunkten des perspectivischen Durchschnittes der beiden Büschel mit dem Kreise (Fig. 15), welcher sie zum Durchmesser hat und die Scheitel beider Büschel enthält. Ihre Existenz in der projectivischen Lage ist nach dem Vorigen unzweifelhaft, ihre Construction wird sich später ergeben (§. 53). Zwei beliebige Paare entsprechender Strahlen A, A', B, B' geben mit ihnen die Relation

$$\{RR^*AB\} = \{R'R^{*'}A'B'\}$$

d. h.

$$\tan(R, A) : \tan(R, B) = \tan(R', A') : \tan(R', B')$$

oder

$$\tan(R', B') = \text{const.} \tan(R, B)$$

als einfachen Ausdruck der Projectivität der Büschel. Für $\text{const} = \pm 1$ erhält man als Specialfall der projectivischen die gleichen Büschel.

Die vorigen Constructionen erlauben die Bestimmung aller Arten projectivischer Gebilde erster Stufe aus je drei entsprechenden Elementenpaaren. Eine geradlinige Punktreihe und ein Strahlenbüschel vervollständigt man aus drei entsprechenden Paaren, indem man entweder über der Reihe ein Büschel aus einem Punkte oder aus dem Büschel eine Reihe durch eine Transversale bildet; projectivische Ebenenbüschel werden durch den Schnitt mit einer Ebene auf projectivische Strahlenbüschel und durch den mit beliebigen Geraden auf projectivische Reihen zurückgeführt und aus diesen nach den vorigen Methoden vervollständigt.

28. Für projectivische Punktereihen, welche nicht in perspectivischer Lage sind, umhüllen die geraden Verbindungslinien entsprechender Punktepaare statt durch einen Punkt zu gehen eine Curve; und für projectivische Strahlenbüschel, welche nicht in perspectivischer Lage sind, liegen die Schnittpunkte entsprechender Strahlenpaare anstatt in einer Geraden zu sein, auf einer Curve. Man erhält so als Erzeugnisse der beiden ersten projectivischen Elementargebilde zwei Curven und es ist

offenbar, daß durch die analoge Verbindung auch der Ebenenbüschel mit einander und mit den beiden vorigen ähnliche andere Erzeugnisse hervorgebracht werden können. Die Betrachtung jener Curven ist vor Allem förderlich für die Weiterführung der Theorie der Grundgebilde. Ihre Natur ergibt sich aus ihrer Entstehung. Die Umhüllungscurve der geraden Verbindungslinien entsprechender Punktpaare von zwei projectivischen Reihen kann mit einem beliebigen Punkte ihrer Ebene nicht mehr als zwei Gerade gemein haben oder es können an sie von jedem aus nur zwei Tangenten gezogen werden; denn drei derselben würden drei Paare entsprechender Punkte in zwei projectivischen Reihen auf Geraden aus einem Punkte bedingen, was nur unter Voraussetzung der perspectivischen Lage derselben möglich ist. Man sagt, die Umhüllungscurve ist von der zweiten Classe.

Ebenso ist der Ort der Schnittpunkte der entsprechenden Paare von zwei projectivischen Büscheln eine Curve zweiter Ordnung, d. h. eine solche, die mit einer beliebigen Geraden in ihrer Ebene nur zwei Punkte (Schnittpunkte) gemein haben kann; denn drei gemeinschaftliche Punkte würden die perspectivische Lage der Büschel bedingen, in welcher alle Paare entsprechender Strahlen sich in dieser Geraden schneiden. Dieselbe würde für diesen äußersten Fall zusammen mit dem Scheitelstrahl beider Büschel, der ihnen entsprechend gemeinsam ist, die Ortscurve vertreten; ebenso der Schnittpunkt der Verbindungslinien der entsprechenden Punktpaare beider Reihen mit dem gemeinsamen Punkte derselben im vorigen Falle die Umhüllungscurve, noch immer in jenem Falle zweiter Ordnung und in diesem zweiter Classe.

29. Wenn die geraden Verbindungslinien von vier Paaren entsprechender Punkte aa' , bb' , cc' , dd' beider Reihen A, B, C, D (Fig. 16) gezogen werden, so bilden sie und die Träger der Reihen selbst E, F , ein System von sechs Geraden, in welchem jede zwei mit den vier übrigen Reihen von gleichen entsprechenden Doppelverhältnissen bilden. Ebenso bilden die Schnittpunkte a, b, c, d der vier Paare von entsprechenden Strahlen AA' , BB' , CC' , DD' mit den Scheiteln e, f der Büschel selbst ein System, in welchem jede zwei mit den vier übrigen durch projectivische Büschel verbunden werden. Denn z. B. (Fig. 17) aus

$$\{a.cdef\} = \{b.cdef\} \text{ folgt } \{c.abef\} = \{d.abef\},$$

weil für x, x', y, y', z, z' als die Schnittpunkte der Paare von Geraden $bc, ad; ca, bd; cd, ab$ mit der gemeinschaftlichen Linie ef aus

$$\{a.cdef\} = \{b.cdef\} \quad \text{zuerst} \quad \{yx'ef\} = \{xy'ef\}$$

und somit auch

$$\{yxef\} = \{x'y'ef\} \quad \text{oder} \quad \{c.abef\} = \{d.abef\}$$

hervorgeht; in analoger Weise für jeden der sechs Fälle, in denen die betrachtete Gruppe von vier Elementen mit der ursprünglichen zwei Elemente gemein hat. Für die acht weiteren Fälle, in welchen drei gemeinsame Elemente vorhanden sind, geht die Giltigkeit daraus hervor.

Da aber zu den Trägern der projectivischen Reihen und der Verbindungslinien von drei Paaren aa', bb', cc' die Verbindungslinie eines beliebigen vierten Paares als sechste Gerade und ebenso zu den Trägern der projectivischen Büschel und den Schnittpunkten von drei Paaren AA', BB', CC' der Schnittpunkt jedes beliebigen vierten Paares als sechster Punkt hinzugenommen werden kann, so gelten die Sätze:

Eine Curve zweiter Ordnung ist durch fünf beliebige Punkte als ihre Punkte bestimmt. Vier Punkte einer Curve zweiter Ordnung werden mit irgend zwei anderen Punkten derselben durch je vier Strahlen verbunden, welche gleiche entsprechende Doppelverhältnisse bestimmen. Ein solches Doppelverhältniß heißt das Doppelverhältniß von vier Punkten der Curve zweiter Ordnung.

Eine Curve zweiter Classe ist durch fünf beliebige gerade Linien als ihre Tangenten bestimmt. Vier Tangenten einer Curve zweiter Classe werden von irgend zwei anderen Tangenten derselben in je vier Punkten geschnitten, welche gleiche entsprechende Doppelverhältnisse bestimmen. Ein solches Doppelverhältniß heißt das Doppelverhältniß von vier Tangenten der Curve zweiter Classe.

Die Construction einer Curve zweiter Classe aus fünf Tangenten erfolgt daher durch Vervollständigung der beiden projectivischen Reihen, welche drei der gegebenen Tangenten durch ihre Schnittpunkte mit den beiden übrigen in diesen bestimmen (§. 26) und durch Verbindung der entsprechenden Paare derselben; ebenso die Construction der Curve zweiter Ordnung aus fünf Punkten durch Vervollständigung der beiden projectivischen Büschel, welche drei der gegebenen Punkte durch ihre Verbindungs-

linien mit den beiden übrigen an diesen bestimmen. Die Träger der Reihen haben in jenem Falle zu ihren Berührungspunkten mit der Curve die Punkte p', q , welche in ihnen ihrem Schnittpunkt pq' entsprechen, in diesem zu ihren Tangenten an die Curve die Strahlen P', Q , welche in ihnen dem Scheitelstrahl PQ' entsprechen. Denn man nennt den Schnittpunkt eine Tangente mit der unendlich nahe benachbarten Tangente der Curve ihren Berührungspunkt mit derselben und die Verbindungslinie eines Punktes der Curve mit dem unendlich nahe benachbarten Punkte derselben die Tangente des Punktes.

30. Die Sätze von Pascal und Brianchon sind nur andere Ausdrucksformen der vorigen Constructionen.

Sechs Punkte einer Curve zweiter Ordnung bilden in jeder Aufeinanderfolge ein Sechseck, dessen drei Gegenseitenpaare sich in Punkten einer geraden Linie durchschneiden.

Denn sind a, b, c, d, e, f solche sechs Punkte, so ist nach dem Vorigen

$$\{a.bcdf\} = \{e.bcdf\}$$

und wenn man diese Büschel durch die Transversalen cd und cb respective schneidet und die Punkte ab, cd und af, cd mit b', p_3 , die Punkte ed, cb und ef, cb mit d', p_2 bezeichnet,

$$\{b'cdp_3\} = \{bcd'p_2\}.$$

Projicirt man diese Reihen aus dem Punkte ab, de oder p_1 , so wird

$$\{p_1.b'cdp_3\} = \{p_1.bcd'p_2\}$$

und da diese zwei projectivischen Büschel die Paare entsprechender Strahlen p_1b', p_1b ; p_1c, p_1c ; p_1d, p_1d' gemein haben, so fällt auch das Paar p_1p_3, p_1p_2 in eine Gerade; wir nennen sie die *Pascal'sche Linie* P des Sechsecks $abcdef$ (Fig. 18).

Legt man daher durch den Schnittpunkt p_1 der Geraden ab, de gerade

Sechs Tangenten einer Curve zweiter Classe bilden in jeder Aufeinanderfolge ein Sechseck, dessen drei Gegeneckenpaare auf geraden Linien aus einem Punkte liegen.

Sind A, B, C, D, E, F solche sechs Tangenten, so ist nach dem Vorigen

$$\{A.BCDF\} = \{E.BCDF\}$$

und wenn man diese Reihen aus den Punkten CD, CB respective projicirt und die Verbindungslinien AB, CD und AF, CD mit B', P_3 , die Linien ED, CB und EF, CB mit D', P_2 bezeichnet,

$$\{B'CDP_3\} = \{BCD'P_2\}.$$

Schneidet man diese Büschel mit der Geraden P_1 , welche die Gegenecken AB, DE verbindet, so wird

$$\{P_1.B'CDP_3\} = \{P_1.BCD'P_2\}$$

und da diese projectivischen Reihen, die entsprechenden Paare P_1B', P_1B ; P_1C, P_1C' ; P_1D, P_1D' gemein haben, so fallen auch P_1P_3 und P_1P_2 auf einen Punkt; wir nennen ihn den *Brianchon'schen Punkt* p des Sechsecks $ABCDEF$ (Fig. 19).

Wählt man auf der Verbindungslinie P_1 der Punkte AB, DE Punkte,

Linien, welche bc , ed respective in Punkten p_2 , p_3 schneiden und verbindet man diese mit e und a respective durch Gerade, so schneiden sich diese immer in einem sechsten Punkte f der durch $abcde$ bestimmten Curve. Mit der Drehung von P um p_1 rückt f auf der Peripherie der Curve fort.

welche mit BC und CD respective die Geraden P_2 , P_3 bestimmen, und schneidet man diese mit E und A respective in Punkten, so liegen diese immer in einer sechsten Tangente F der durch $ABCDE$ bestimmten Curve. Mit der Verschiebung von p auf P_1 durchläuft F alle Lagen der Tangenten der Curve.

Man construirt also für die Curve zweiter Ordnung aus fünf Punkten ihren zweiten Schnittpunkt mit jeder Geraden, die durch einen der fünf gezogen wird, und für die Curve zweiter Classe aus fünf Tangenten ihre zweite Tangente mit jedem Punkte, der auf einer der fünf gewählt wird.

31. Wenn zwei benachbarte Ecken des eingeschriebenen Sechsecks zusammenfallen, so liefert der Satz von Pascal in ihrer geraden Verbindungslinie die Tangente der Curve zweiter Ordnung in diesem Punkte; und ebenso liefert, wenn man zwei aufeinander folgende Seiten des umgeschriebenen Sechsecks zusammenfallen läßt, der Satz von Brianchon in ihrem Durchschnittspunkte den Berührungspunkt der Curve zweiter Classe mit derselben. Denn nach jenem muß für a , b als zusammenfallend die zugehörige Tangente mit der Geraden de in einem Punkte der Verbindungslinie von bc , ef mit cd , fa zusammen treffen (Fig. 18); und nach diesem ebenso für A , B als zusammenfallend der zugehörige Berührungspunkt mit dem Schnittpunkt DE in einer geraden Linie liegen, die auch die Schnittpunkte der Geraden BC , EF und CD , FA enthält (Fig. 19).

Denkt man zweimal zwei auf einander folgende Ecken oder Seiten des eingeschriebenen Sechsecks oder des umgeschriebenen Sechsecks zusammenfallend, so erhält man unter Annahme, daß die vereinigten Paare die Gegenecken oder Seiten des entstehenden Vierecks oder Vierseits sind die Sätze (Fig. 20):

In jedem einer Curve zweiter Ordnung eingeschriebenen Viereck liegen die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare und die der Tangenten in den Gegenecken in einer Geraden.

In jedem einer Curve zweiter Classe eingeschriebenen Vierseit gehen die Verbindungslinien der Gegeneckenpaare und die der Berührungspunkte in den Gegenseiten durch einen Punkt.

Endlich durch die dreimalige Vereinigung aufeinander folgender Paare:

In jedem einer Curve zweiter Ordnung eingeschriebenen Dreieck liegen die Durchschnittpunkte der Seiten mit den Tangenten der Curve in den respective gegenüberliegenden Ecken in einer Geraden.

In jedem einer Curve zweiter Classe umgeschriebenen Dreieck gehen die Verbindungslinien der Ecken mit den Berührungspunkten der Curve in den respective gegenüberliegenden Seiten durch einen Punkt.

Wie diese Sätze so sind auch als Specialfälle in den Sätzen von Pascal und Brianchon die Constructionen der Curve zweiter Ordnung aus vier Punkten und der Tangente in einem von ihnen, aus drei Punkten und den Tangenten in zweien derselben enthalten, so wie die der Curve zweiter Classe aus vier Tangenten und dem Berührungspunkt in einer von ihnen und aus drei Tangenten und den Berührungspunkten in zweien derselben.

32. Von den übrigen Erzeugnissen projectivischer Gebilde erster Stufe treten zunächst diejenigen den vorigen zur Seite, welche denselben nach dem Gesetze der Dualität entsprechen; nämlich die Erzeugnisse von zwei projectivischen Ebenenbüscheln, deren Träger sich schneiden — entsprechend den zwei projectivischen Punktreihen, deren Träger in einer Ebene liegen, und von zwei projectivischen Strahlenbüscheln, deren Scheitel zusammenfallen — entsprechend den zwei Strahlenbüscheln von zusammenfallenden Ebenen. Sie erzeugen Gebilde im Strahlenbündel und im Ebenenbündel, welche der Curve zweiter Ordnung im ebenen Punktesystem und der Curve zweiter Classe im ebenen Strahlensystem respective entsprechen, die Kegelflächen zweiter Ordnung und diejenigen zweiter Classe.

In zwei projectivischen Ebenenbüscheln, deren Träger einen Punkt gemein haben, liegen die Durchschnittpunkte der Paare entsprechender Ebenen in einer Kegelfläche zweiter Ordnung. Jeder ebene Schnitt der Kegelfläche zweiter Ordnung ist eine Curve zweiter Ordnung, da sie aus

In zwei projectivischen Strahlenbüscheln, deren Träger zusammenfallen, bestimmen die Ebenen der Paare entsprechende Strahlen eine Kegelfläche zweiter Classe als ihre Umhüllte. Jeder ebene Schnitt der Kegelfläche zweiter Classe ist eine Curve zweiter Classe, da sie von den

den projectivischen Strahlenbüscheln erzeugt wird, welche die Schnittebene mit den erzeugenden Ebenenbüscheln bestimmt.

Die Ebene, welche zwei unendlich nahe benachbarte gerade Linien (Erzeugende) der Kegelfläche bestimmen, ist eine Tangentenebene der Kegelfläche. Der Satz von P a s c a l mit allen seinen Folgerungen überträgt sich auf diese Flächen; er erlaubt ihre Construction aus fünf Strahlen eines Bündels, von denen keine drei in einer Ebene liegen und die der Tangentenebene für einen derselben; ebenso die aus vier Strahlen eines Bündels und der Tangentenebene in einer oder aus drei Strahlen und den Tangentenebenen in zweien derselben.

geraden Verbindungslinien der entsprechenden Punkte derjenigen projectivischen Reihen umhüllt wird, die ihre Ebene mit den erzeugenden projectivischen Büscheln bestimmt.

Die gerade Linie, welche zweien unendlich nahen Ebenen der Kegelfläche gemeinsam ist, ist eine gerade Linie (Erzeugende) der Kegelfläche. Der Satz von B r i a n c h o n mit seinen Folgerungen überträgt sich auf diese Flächen und erlaubt ihre Construction aus fünf Ebenen eines Bündels, von denen keine drei dieselbe Gerade enthalten und die der Berührungserzeugenden für eine derselben; ebenso die aus vier Ebenen eines Bündels und der Berührungserzeugenden in einer oder aus drei Ebenen und der Berührungserzeugenden in zweien derselben.

Oder kurz: Der Schein einer Curve zweiter Ordnung aus einem Punkte ist eine Kegelfläche zweiter Ordnung und derjenige einer Curve zweiter Classe eine Kegelfläche zweiter Classe. Solche Kegelflächen sind es daher, welche die centralprojectivische Abbildung der Curven zweiter Ordnung oder Classe vermitteln. Da die Definition dieser Curven aber von Eigenschaften der Projectivität allein ausgeht und alle angegebenen Constructionsmethoden ausschließlich auf solche und den Gebrauch des Lineals gegründet sind, so folgt, daß alle Projectionen von Curven zweiter Ordnung oder Classe wiederum Curven zweiter Ordnung oder Classe sind, und daß die Constructionen im Bilde an den Projectionen der gegebenen Punkte und Tangenten ganz ebenso ausgeführt werden müssen, wie sie am Original auszuführen sein würden.

33. Diese Betrachtungen verknüpfen die Curven zweiter Ordnung oder Classe auf das Engste mit der für die graphische Methode wichtigsten unter allen Curven, mit dem Kreise.

Der Kreis ist eine Curve zweiter Ordnung, weil die Strahlenbüschel, welche aus zwei beliebigen Punkten vier feste Punkte derselben projeciren, projectivisch gleich sind auf Grund der Gleichheit der Peripheriewinkel über demselben Bogen; er entsteht auch

wie die Curven zweiter Ordnung überhaupt durch den Schnitt von zwei projectivisch gleichen Strahlenbüscheln von einerlei Drehungssinn (Fig. 21). Der Kreis ist aber auch eine Curve zweiter Classe, denn er hat die Eigenschaft, daß das zwischen zwei festen Tangenten gelegene Segment einer veränderlichen Tangente vom Centrum aus unter constantem Winkel projectirt wird, so daß die Reihen, welche von den Lagen der beweglichen Tangente auf den festen Tangenten gebildet werden, die Schnitte gleichwinkliger Strahlenbüschel und daher projectivisch sind. Der Kreis entsteht daher auch als Umhüllung der geraden Verbindungslinien der entsprechenden Paare in zwei projectivischen Reihen, die aus einem Punkte der Halbierungslinie des Winkels ihrer Träger durch gleichwinklige Strahlbüschel von einerlei Drehungssinn projectirt werden.

Sind A, B, C, D (Fig. 21) vier Lagen der beweglichen Tangente mit den respectiven Berührungspunkten a'', b'', c'', d'' und den Schnittpunktenreihen a, b, c, d ; a', b', c', d' auf den beiden festen Tangenten O, O' in den Berührungspunkten o, o' , so ist

$$\{o'.a''b''c''d''\} = \{a'b'c'd'\} = \{abcd\} = \{ABCD\},$$

d. h. das Doppelverhältniß von vier Punkten des Kreises ist dem Doppelverhältniß der zugehörigen Tangenten desselben gleich.

Die Centralprojection des Kreises, d. h. der ebene Schnitt seines projectirenden Kegels — die man einen Kegelschnitt par excellence zu nennen pflegt — ist eine Curve zweiter Ordnung und zweiter Classe wie der projectirende Kegel eine Kegelfläche zweiter Ordnung und Classe ist. Das Doppelverhältniß von irgend vier Tangenten derselben ist constant und dem Doppelverhältnisse ihrer vier Berührungspunkte gleich. Die Bildung der centriscollinearen Figuren zu den Constructionen, welche die beiden vorher betrachteten Erzeugungsweisen des Kreises darstellen, führt zu den Constructionen seiner Collinearverwandten als Erzeugnisse projectivischer Gebilde im Allgemeinen. Daß überhaupt alle Curven zweiter Ordnung und ebenso alle Curven zweiter Classe Centralprojectionen des Kreises d. h. Kegelschnitte sind und umgekehrt, wird sich aus den weiteren Entwicklungen ergeben (§. 51).

34. Die Collinearverwandten des Kreises sind von verschiedener Gestalt je nach der Lage des Kreises in Bezug auf die

Gegenaxe seines Systems; wenn er dieselbe nicht trifft, so hat der collinearverwandte Kegelschnitt keine reellen Punkte mit der unendlich entfernten Geraden seines Systems gemein und heißt *Ellipse*, wenn der Kreis die Gegenaxe seines Systems in zwei reellen Punkten schneidet, so hat der Kegelschnitt zwei reelle und verschiedene Punkte in unendlicher Entfernung und heißt *Hyperbel*; berührt der Kreis die Gegenaxe seines Systems, so berührt auch der collinearverwandte Kegelschnitt die unendlich entfernte Gerade seines Systems und heißt eine *Parabel*. Diese Bedingungen im Sinne der Centralprojection und in Bezug auf den projicirenden Kegel eines im Raume bedachten Kreises ausgesprochen, lauten wie folgt: Das Bild des Kreises ist eine Ellipse, wenn die Verschwindungsebene mit dem projicirenden Kegel nur das Centrum gemein hat, eine Hyperbel, wenn sie ihn in zwei Erzeugenden durchschneidet und eine Parabel, wenn sie ihn längs einer Erzeugenden berührt.

Die Aufnahme der unendlich fernen Punkte der Hyperbel und Parabel unter die Bestimmungsstücke derselben liefert Specialfälle der allgemeinen Constructionen, die ohne jede wesentliche Veränderung aus diesen hervorgehen: Die Construction der Hyperbel aus vier Punkten und einem ihrer unendlich fernen Punkte, man sagt einer Asymptotenrichtung; aus drei Punkten und den beiden Asymptotenrichtungen; aus drei Punkten oder drei Tangenten und der Tangente in einem unendlich fernen Punkte oder einer Asymptote; aus einem Punkte oder einer Tangente und beiden Asymptoten (Fig. 22, 23). Die Construction der Parabel aus drei Punkten oder drei Tangenten und ihren unendlich fernen vereinigten Punkten d. i. ihrer Axenrichtung; aus drei Tangenten und dem Berührungspunkt in einer derselben; aus zwei Tangenten und ihren Berührungspunkten und aus vier Tangenten — zu denen die unendlich ferne Gerade der Ebene die fünfte Tangente ist (Fig. 24). Diesen speciellen Constructionen entsprechen specielle Sätze über die Kegelschnitte, wie beispielsweise folgende: Das Parallelogramm, welches die von einem Punkte der Hyperbel gezogenen Parallelen zu ihren Asymptoten mit diesen selbst bestimmen, ist von constanter Fläche; ebenso das Dreieck, welches eine Tangente der Hyperbel mit den Asymptoten derselben bestimmt. Die Verbindungslinien von zwei festen mit einem veränderlichen Punkte der Hyperbel bestimmen

in der Asymptote derselben zwei gleiche und gleichsinnige Reihen. Die Tangenten einer Parabel bestimmen auf zwei festen unter ihnen projectivisch ähnliche Reihen.

35. Es wäre die nächste Aufgabe einer graphischen Theorie der Kegelschnitte, die Beziehungen eines durch seine Bestimmungselemente — Punkte und Tangenten — gegebenen Kegelschnitts zu einer in seiner Ebene gelegenen Geraden oder zu einem Punkte derselben zu untersuchen, d. i. die zwei Punkte, welche jene, und die zwei Tangenten, welche dieser mit ihm gemein hat, zu bestimmen.

Die projectivischen Strahlenbüschel, welche den durch fünf Punkte bestimmten Kegelschnitt hervorbringen, bestimmen auf jeder Geraden in seiner Ebene zwei projectivische Punktreihen, welche nur zwei Punkte entsprechend gemein haben können; diese sind die Schnittpunkte der Geraden mit dem Kegelschnitt. Ebenso bestimmen die beiden projectivischen Punktreihen, welche den durch fünf Tangenten gegebenen Kegelschnitt hervorbringen, mit jedem Punkte seiner Ebene zwei concentrische, projectivische Strahlenbüschel, welche nur zwei Strahlen entsprechend gemein haben können: Die Tangenten des Kegelschnitts aus dem gegebenen Punkte. Beide Probleme erfordern also die graphische Behandlung projectivischer Punktreihen und Strahlenbüschel von einerlei Träger, welche durch die Constructionen der §§. 26, 27 nicht direct erledigt ist; die Behandlung projectivischer Ebenenbüschel von einerlei Scheitelkante käme auf die erstere zurück.

Die Fundamentalsätze der Theorie der Kegelschnitte in §. 29 zeigen, daß die Paare der entsprechenden Strahlen $A, A'; B, B'$ etc. von zwei projectivischen Büscheln mit demselben Träger auf jedem durch denselben gehenden Kegelschnitt Paare entsprechender Punkte von zwei projectivischen Systemen $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'$ etc. bestimmen und ebenso, daß die Paare $a, a'; b, b'$ etc. der entsprechenden Punkte von zwei projectivischen Punktreihen auf derselben Geraden mit jedem diese Gerade berührenden Kegelschnitt Paare entsprechender Tangenten $A, A'; B, B'$ etc. von zwei projectivischen Systemen bestimmen, die wie jene früher betrachteten durch drei Paare entsprechender Elemente bestimmt sind.

Es sind Specialfälle hiervon, daß zwei geradlinige projectivische Reihen mit jedem Punkte ihrer Ebene und zwei punktförmige pro-

jectivische Strahlenbüschel mit jeder Geraden in ihrer Ebene zwei projectivische Büschel oder Reihen von einerlei Träger bestimmen; aber zur Ermittlung der sich selbst entsprechenden oder Doppelselemente führen sie nicht.

Die Central-Collineation in der Ebene oder die Centralprojection ebener Systeme bildet endlich ebenfalls eine Quelle concentrischer und coaxialer projectivischer Systeme, wenn auch von mehr eingeschränkter Art. In centriscollinearen Systemen sind die entsprechenden Punktreihen in gerader Linie und die entsprechenden Strahlenbüschel um einen Punkt projectivisch; geht der geradlinige Träger oder die Axe der einen Reihe durch das Centrum der Collineation, so fällt der entsprechenden andern mit ihm zusammen, ebenso wenn der Scheitel oder das Centrum des einen Büschels in der Collineationsaxe liegt, der Scheitel des andern: Entsprechende Reihen durch das Centrum sind coaxial, entsprechende Büschel aus der Collineationsaxe sind concentrisch. Die Besonderheit dieses Vorkommens besteht darin, daß die Doppelselemente solcher Systeme direct bekannt sind, nämlich für die vereinigten projectivischen Reihen das Centrum der Collineation und der Punkt in der Collineationsaxe, für die concentrischen projectivischen Büschel die Collineationsaxe und der Strahl nach dem Collineations-Centrum.

36. Denken wir zwei projectivische Punktsysteme auf demselben Kegelschnitt durch drei entsprechende Paare $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'$ bestimmt (Fig. 25), so gehen von entsprechenden Punkten α, α' derselben nach den Punkten des jedesmaligen andern Systems projectivische Strahlenbüschel, die einen Strahl $\alpha\alpha'$ entsprechend gemein haben $\{\alpha.\alpha'\beta'\gamma'\delta'\} = \{\alpha'.\alpha\beta\gamma\delta\}$, also für die gerade Linie zwischen den Punkten $\alpha\beta', \alpha'\beta; \alpha\gamma', \alpha'\gamma$ als Axe perspectivisch sind. Wenn den Scheiteln β, β' die Axe der Perspective $\beta\alpha', \beta'\alpha; \beta\gamma', \beta'\gamma$ entspricht, so folgt aus dem Umstande, daß die sechs gegebenen Punkte in der Folge $\alpha\beta'\gamma, \alpha'\beta\gamma'$ ein Pascal'sches Sechseck bilden, welches die Linien $\alpha\beta', \alpha\beta; \beta'\gamma, \beta\gamma'; \gamma\alpha', \gamma'\alpha$ zu seinen Gegenseitenpaaren hat, daß die Axen dieser Paare perspectivischer Strahlenbüschel eine einzige Gerade P bilden, dieselbe dient zur Construction fernerer entsprechender Paare des Systems aus den drei gegebenen: Ist δ ein vierter Punkt der ersten Reihe, so liegt der entsprechende δ' der zweiten so, daß die Geraden $\alpha'\delta, \alpha\delta'$ oder $\beta'\delta, \beta\delta'$ etc. sich in der Geraden P durchschneiden.

Fällt aber δ in einen der Punkte, welche die Gerade P mit dem Kegelschnitt gemein hat, so vereinigt sich δ' mit ihm, d. h. die Punkte φ , φ^* des Kegelschnitts, welche der Geraden P angehören, sind die entsprechend gemeinsamen oder Doppelpunkte der projectivischen Reihen im Kegelschnitt. Im Falle der Berührung von P mit dem Kegelschnitt sind sie in einem Punkte vereinigt; wenn die Gerade P den Kegelschnitt nicht trifft, so sagt man, daß die Doppelpunkte φ , φ^* des Systems imaginär sind, erachtet sie aber nach wie vor als vollständig definirt. Sie liefern die Relation

$$\{\varphi\varphi^*\alpha\beta\} = \{\varphi\varphi^*\alpha'\beta'\},$$

d. h. jedes Paar von Elementen bestimmt mit den Doppelementen dasselbe Doppelverhältniß, wie das Paar der entsprechenden Elemente. Sind die Doppelemente oder ist ihre gerade Verbindungslinie P gegeben, so genügt zur Bestimmung der projectivischen Reihen ein einziges getrenntes Paar entsprechender Punkte α , α' .

Die von einem Punkte t des Kegelschnitts nach den entsprechenden Punkten a , a' ; b , b' etc. der beiden projectivischen Reihen gehenden Strahlen A , A' etc. bilden ein Paar von concentrischen projectivischen Büscheln, dessen Doppelstrahlen F , F^* nach den Punkten φ , φ^* gehen.

Zu zwei concentrischen projectivischen Strahlenbüscheln, die durch drei entsprechende Paare A , A' ; B , B' ; C , C' bestimmt sind, liefert jeder durch seinen Scheitel gehende vollständig verzeichnete Kegelschnitt drei entsprechende Paare α , α' ; β , β' ; γ , γ' von projectivischen Reihen auf demselben als Schnittpunkte, diese bestimmen die Gerade P , welche zur Construction aller übrigen entsprechenden Strahlenpaare sowie zu der der Doppelstrahlen dient. Unter allen den Scheitel enthaltenden Kegelschnitten empfiehlt sich der Kreis durch Bequemlichkeit und Genauigkeit.

37. Sind zwei projectivische Tangentenschaaren an denselben Kegelschnitt durch drei entsprechende Paare A , A' ; B , B' ; C , C' gegeben (Fig. 26), so erzeugen die Strahlen A , A' mit denen der jedesmaligen andern Schaar perspectivische Punktreihen $\{A.A'B'C'D'\dots\} = \{A'.ABCD\dots\}$ mit dem Schnittpunkte der Geraden AB' , $A'B$; AC' , $A'C$ als Centrum der Perspective; ebenso B , B' mit dem Punkte AB' , $A'B$; BC' , $B'C$; da die Strahlen in der Ordnung $AB'CA'BC'$ die Seiten eines Brianchon'schen Sechseits sind,

welches die Geraden AB' , $A'B$; $B'C$, BC' ; $C'A$, CA' zu den Verbindungslinien der Gegenecken hat, so liefern alle diese perspectivischen Reihen ein einziges Centrum p . Dasselbe dient zur Bestimmung der Paare entsprechender Strahlen D , D' etc., weil die Punkte AD' , $A'D$ auf derselben durch p gehenden Geraden liegen müssen. Die von p aus an den Kegelschnitt gehenden Tangenten FF^* liefern die entsprechend gemeinsamen oder Doppelstrahlen der projectivischen Schaaren. Die Relation

$$\{FF^*AB\} = \{FF^*A'B'\}$$

verbindet sie mit je zwei Paaren entsprechender Strahlen; sind sie oder ist ihr Durchschnittspunkt p bekannt, so genügt ein Paar entsprechender Strahlen zur Bestimmung. Schneidet man mit einer beliebigen Tangente T des Kegelschnitts die projectivischen Tangentenschaaren, so bestimmen sie in ihr die entsprechenden Paare a , a' etc. und die Doppelpunkte f , f^* von zwei projectivischen Punktreihen. Und wenn solche durch drei Paare entsprechender Punkte in einer Geraden bestimmt sind, so bestimmen diese mit einem die Gerade berührenden Kegelschnitt drei Paare von zwei projectivischen Tangentenschaaren A , A' etc., durch deren Vervollständigung mittelst des Punktes p und aus deren Doppelstrahlen F , F^* die Vervollständigung der coaxialen Reihen und die Bestimmung ihrer Doppelpunkte erfolgt. Unter allen den Träger berührenden Kegelschnitten liefern Kreise die bequemste und schärfste Construction.

Damit ist streng und allgemein gezeigt, daß und wie zwei vereinigte projectivische Punktreihen oder Strahlenbüschel zwei Doppelemente besitzen, die entweder reell und verschieden oder imaginär oder insbesondere reell und zusammenfallend sind.

Von den Doppelementen abgesehen sind die vorigen Constructionen auch für einen nur durch fünf Punkte oder Tangenten bestimmten Kegelschnitt mittelst des Lineals allein ausführbar; aber die Benützung des Hilfskreises ist dem wegen größerer Bequemlichkeit und Genauigkeit der Ausführung vorzuziehen, für die Bestimmung der Doppelemente insbesondere aber erforderlich. Sie entspricht dem Übergange zu einer Centralprojection der allgemeinen Construction, als bei welcher die Projectivität der in Betracht kommenden Gebilde nicht gestört wird.

38. Die Construction der Durchschnittspunkte einer Geraden mit einem durch fünf Punkte bestimmten Kegelschnitt und die der Tangenten von einem Punkte an einen durch fünf Tangenten bestimmten Kegelschnitt (Fig. 27) sind nach §. 35 im Vorigen mit enthalten und zwar jede der beiden Aufgaben in doppelter Lösung. Die Bestimmung der Gattung eines durch fünf Punkte gegebenen Kegelschnittes ist ein Specialfall der ersten Aufgabe; die unendlich entfernte Gerade ersetzt die gegebene Gerade derselben. Man bildet also aus zweien der fünf Punkte das Strahlbüschel über den drei anderen Punkten, verlegt das eine derselben durch Parallelverschiebung an den Scheitel des andern — wodurch die entsprechende Reihe in der unendlich fernen Geraden nicht geändert wird — und bestimmt die Doppelstrahlen der so erhaltenen concentrischen projectivischen Büschel; ihre Richtungen sind die unendlich entfernten Punkte des Kegelschnitts (Asymptotenrichtungen); ihre Realität characterisirt denselben als Hyperbel, ihr Zusammenfallen als Parabel, ihr Imaginärsein als Ellipse. Einfache Regeln für die Lage der Punkte, welchen Ellipse oder Hyperbel entspricht, lassen sich leicht ableiten. Mit denselben Methoden ist die Aufgabe lösbar: die durch vier Punkte gehenden und eine Gerade berührenden Kegelschnitte zu construiren (Fig. 28) — und ebenso: die aus vier Tangenten und einem Punkte bestimmten Kegelschnitte zu construiren. Denn denkt man zwei der gegebenen Punkte mit den beiden übrigen durch Gerade verbunden, so erzeugen sie mit der als Tangente gegebenen Geraden zwei vereinigte projectivische Reihen, die aus den Paaren a, a' ; b, b' durch die weitere Bedingung bestimmt sind, daß ihre Doppelpunkte vereinigt sein müssen; denkt man zwei der vier Tangenten von den beiden übrigen geschnitten, so erzeugen die Schnittpunkte mit dem gegebenen Punkte des Kegelschnitts zwei projectivische Strahlenbüschel, die durch die beiden gefundenen Paare und die Nothwendigkeit, daß ihre Doppelstrahlen sich decken, völlig bestimmt sind. Im ersteren Falle ist der Vereinigungspunkt der Doppelpunkte — für den man zwei Lagen erhält, die reell oder imaginär sein können — der Berührungspunkt eines Kegelschnittes durch die vier Punkte mit der gegebenen Tangente; im letzteren Falle die Gerade der vereinigten Doppelstrahlen, für welche man zwei reelle oder imaginäre Lagen erhält — die Tangente eines Kegelschnitts, welcher die vier Geraden

berührt, in dem gegebenen Punkte. Man erhält daher zwei Kugelschnitte für jedes der beiden Probleme und es bliebe die Frage zu erörtern: unter welchen Voraussetzungen können dieselben zusammenfallen und unter welchen sind sie imaginär?

Ein wichtiger Specialfall des ersten Problems ist die Construction der durch vier gegebene Punkte möglichen Parabeln; die gegebene Tangente ist in diesem Falle die unendlich entfernte Gerade der Ebene und man erhält die Axenrichtungen 2∞ , $2\infty'$ der entsprechenden Parabeln (Fig. 29). Dieselbe Construction löst auch die berühmten Probleme: Man bestimme ein n -Eck, dessen n -Seiten in gegebener Ordnung durch n feste Punkte gehen, während seine n -Ecken in gegebener Ordnung in n Geraden liegen.

Man construire ein n -Eck, welches einem gegebenen (im allgemeinsten Falle durch fünf Punkte) Kegelschnitte eingeschrieben ist, während zugleich seine n -Seiten in gegebener Ordnung durch n feste und bekannte Punkte gehen (Fig. 30).

Man construire ein n -Seit, welches einem (durch fünf Tangenten) gegebenen Kegelschnitt umgeschrieben ist, während zugleich seine n -Ecken in gegebener Ordnung in n festen und bekannten Geraden liegen.

Endlich ist durch die Construction der Doppelemente die allgemeine Aufgabe lösbar: In zwei Paaren projectivischer Systeme an demselben Träger (— respective gerade Linie, Punkt, Kreis, Curve zweiter Ordnung oder Classe) die Paare von Elementen zu bestimmen, welche denselben gemeinschaftlich sind. Wir denken das erste projectivische System durch die Elementengruppen $A, B, C; A', B', C'$ (Fig. 31) und das zweite durch die Gruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}; \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$ bestimmt und nennen $F, F'; F^*F^{*'}$ die gemeinschaftlichen Paare. Werden dann die Elemente A'', B'', C'' so bestimmt, daß sie den Elementen A, B, C als zu der Gruppe $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ gehörig, in der Gruppe $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$ projectivisch entsprechen, und construirt man die Doppelemente $F', F^{*'}$ der projectivischen Gruppen A', B', C' und A'', B'', C'' , endlich aber zu ihnen die Elemente F, F^* , welche jenen Elementen von $F', F^{*'}$ von $A'B'C'$ oder $A''B''C''$ in der Gruppe ABC projectivisch entsprechen, so sind $F, F'; F^*, F^{*'}$ die gemeinschaftlichen Paare entsprechender Elemente beider Systeme von projectivischen Gebilden. Dieses Problem umfaßt eine große Zahl von Specialisirungen, von denen wir nur hervorheben: die Construction der entsprechenden Elementen-

paare in zwei projectivischen Grundgebilden, welche einen vorgeschriebenen Winkel von gegebenem Drehungssinn mit einander einschließen oder ein nach Größe und Sinn vorgeschriebenes Segment zwischen sich fassen; die Construction der entsprechenden Elementenpaare von solchen, die mit einem gegebenen Paar von Elementen ein vorgeschriebenes Doppelverhältniß bilden; die der Elementenpaare, welche mit zwei gegebenen Paaren (den Doppelementen der projectivischen Systeme) je ein gegebenes Doppelverhältniß bestimmen, etc.

39. Die Betrachtung der coaxialen projectivischen Reihen und der concentrischen projectivischen Büschel, wie sie in centriscen Collineationssystemen auftreten (§. 35), fügt dem Vorigen einige nützliche Beziehungen hinzu. Wenn auf einer das Collineationscentrum s enthaltenden Geraden den Punkten a, b des einen Systems die Punkte a', b' des andern entsprechen, und σ den ihr angehörigen Punkt der Collineationsaxe S bezeichnet, so ist

$$\{s\sigma ab\} = \{s\sigma a'b'\},$$

also auch, wie durch die Ausschreibung der Doppelverhältnisse sofort erkannt wird,

$$\{s\sigma aa'\} = \{s\sigma bb'\}$$

d. i. jedes Paar entsprechender Punkte bildet mit den beiden Doppelpunkten ein Doppelverhältniß von constantem Werthe.

Die aus einem beliebigen Punkte der Collineationsaxe nach den Paaren einer solchen Doppelreihe gehenden Strahlen bilden eine Vereinigung von concentrischen projectivischen Strahlenbüscheln entsprechender Geraden, für die die Collineationsaxe und der nach dem Centrum gehende Strahl die Doppelstrahlen sind. Jedes Paar entsprechender Strahlen bestimmt mit den Doppelstrahlen das nämliche mit dem vorigen gleichwerthige Doppelverhältniß $\{S\Sigma AA'\} = \{S\Sigma BB'\}$; daher gelten nach den Gesetzen der centriscen Collineation die Sätze:

In jeder Centralcollineation ebener Systeme bestimmen je zwei entsprechende Punkte mit dem Centrum und dem in ihrer Geraden liegenden Punkte

In jeder Centralcollineation ebener Systeme bestimmen je zwei entsprechende Gerade mit der Axe und dem aus ihrem Schnittpunkte nach dem

der Collineationsaxe ein Doppelverhältniß von unveränderlichem Werthe.

Collineationscentrum gehenden Strahl ein Doppelverhältniß von unveränderlichem Werthe.

Beide Doppelverhältnisse sind gleich und man kann sie unter der Bezeichnung: Doppelverhältniß der Centralcollineation oder der Centralprojection zusammenfassen und nach den Werthen derselben Centralprojectionen von einander unterscheiden.

40. Die Construction entsprechender Punktepaare desselben durch das Centrum gehenden Strahls in centriscollinearen Systemen ist eine Construction coaxialer projectivischer Reihen mit gegebenen reellen Doppelpunkten; ebenso ist die Construction entsprechender Strahlenpaare aus demselben in der Collineationsaxe gelegenen Punkte eine Construction concentrischer projectivischer Strahlenbüschel mit gegebenen reellen Doppelstrahlen. Die Benützung, welche die Gegenaxen der Systeme bei diesen Constructionen erfahren, ist bekannt (§. 19); ein Paar entsprechender Punkte a, a' oder ein Paar entsprechender Strahlen A, A' würde zu ihrer Bestimmung auf Grund der vorigen Sätze führen, wenn Centrum und Axe der Collineation gegeben sind. Entspricht dem unendlich fernen Punkte des Strahls als der ersten Reihe angehörig der Punkt u' und als der zweiten Reihe angehörig der Punkt r , so ist

$$\{s\sigma aa'\} = \{s\sigma\infty u'\} = \{s\sigma r\infty\}, \text{ d. h. } \{s\sigma aa'\} = \frac{sr}{\sigma r} = \frac{\sigma u'}{su'},$$

d. h. die Punkte r, u' der Gegenaxen theilen die Strecke der Doppelpunkte $s\sigma$ und σs nach dem einfachen Verhältniß, welches dem Doppelverhältniß der Collineation gleich ist. Auch ist nach denselben Gleichheiten

$$\frac{as}{\sigma s} : \frac{aa'}{\sigma a'} = \frac{\sigma u'}{\sigma s} = \frac{rs}{\sigma s} \text{ und somit } rs = \sigma u',$$

d. h. die Gegenpunkte r und u' sind gleich entfernt von den Doppelpunkten s und σ in entgegengesetztem Sinne oder die Mitte zwischen den Gegenpunkten ist auch die Mitte zwischen den Doppelpunkten (Vergl. §. 11). Dem entsprechen ganz die Constructionen auf Grund der Centralprojection (Fig. 32). Sind die vereinigten projectivischen

Reihen durch die Doppelpunkte σ , s und ein Paar entsprechender Punkte a , a' gegeben, oder die concentrischen projectivischen Büschel durch die Doppelstrahlen S und Σ und ein Paar A , A' , so zieht man in jenem Falle eine Gerade S durch σ und kann in diesem Falle einen Punkt s auf Σ beliebig wählen; man zieht sodann dort Gerade A , A' aus a , a' respective nach einem Punkte der Geraden S und in beiden Fällen durch s die Parallelen A^* , A'^* zu ihnen und hat in den Punkten A , A'^* ; A' , A^* Punkte der zu S parallelen Gegenaxen. Auch die Construction der entsprechenden Paare rectangulärer Strahlen (§. 27) knüpft sich leicht hieran: Die beiden über $s\sigma$ beschriebenen Kreise, welche ihre Centra respective in den beiden vorher bestimmten Gegenaxen haben, bestimmen in den Endpunkten ihrer in die Gegenaxen fallenden Durchmesser die Punkte, nach welchen die Strahlenpaare R , R^* ; R' , R'^* gehen. Die Symmetrie ihrer Lage gegen die Doppelstrahlen ist darin angezeigt (Fig. 32).

41. Ihrer weiteren Anwendung wegen ist die folgende Ausdrucksform für die vorigen Sätze bemerkenswerth und verdient unabhängigen Beweis (Fig. 33):

Wenn die Ecken zweier Dreiecke a_1, a_2, a_3 ; a'_1, a'_2, a'_3 in Paaren a_1, a'_1 ; a_2, a'_2 ; a_3, a'_3 auf geraden Linien aus einem Centrum s liegen, so schneiden sich die Paare der entsprechenden Seiten $a_1a_2, a'_1a'_2$; $a_2a_3, a'_2a'_3$; $a_3a_1, a'_3a'_1$ in Punkten x_3, x_1, x_2 einer Geraden S und diese schneidet die Geraden $a_1a'_1, a_2a'_2, a_3a'_3$ in drei Punkten $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, die mit diesen Punkten und dem Centrum einerlei Doppelverhältniß bestimmen.

Wenn die Seiten zweier Dreiecke A_1, A_2, A_3 ; A'_1, A'_2, A'_3 in Paaren A_1, A'_1 ; A_2, A'_2 ; A_3, A'_3 durch Punkte einer geraden Linie S gehen, so sind die geraden Verbindungslinien der entsprechenden Ecken derselben $A_1A_2, A'_1A'_2$; $A_2A_3, A'_2A'_3$; $A_3A_1, A'_3A'_1$ drei Strahlen X_3, X_1, X_2 , aus einem Punkte s und dieser bestimmt mit den drei Schnittpunkten der Strahlenpaare $A_1A'_1, A_2A'_2, A_3A'_3$ drei Gerade $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, die mit diesen und dem nach dem Centrum gehenden Strahl einerlei Doppelverhältniß bestimmen.

Denken wir S in dem zur Linken stehenden Satze als die Verbindungslinie von x_1 und x_2 und $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ als die Schnittpunkte von $a_1a'_1, a_2a'_2, a_3a'_3$ mit ihm, so sind $a_2a'_2\sigma_2, a_3a'_3\sigma_3$ aus x_1 in Perspective, also

$$\{a_2a'_2\sigma_2s\} = \{a_3a'_3\sigma_3s\};$$

ebenso $a_3a'_3\sigma_3$, $a_1a'_1\sigma_1$ aus x_2 , so daß

$$\{a_3a'_3\sigma_3s\} = \{a_1a'_1\sigma_1s\} \text{ und somit } \{a_1a'_1\sigma_1s\} = \{a_2a'_2\sigma_2s\},$$

d. h. auch $a_1a'_1\sigma_1$ und $a_2a'_2\sigma_2$ sind in Perspective, die Geraden a_1a_2 und $a'_1a'_2$ schneiden sich in einem Punkte x_3 der Geraden $\sigma_1\sigma_2x_1x_2$ und der Satz ist vollständig bewiesen. Für den Beweis des zur Rechten stehenden Satzes denken wir s als den Schnittpunkt der Geraden X_1 und X_2 und $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ als die Verbindungslinien desselben mit den Punkten $A_1A'_1, A_2A'_2, A_3A'_3$.

Liegen beide Dreiecke in verschiedenen Ebenen, so ist die Gerade S die Schnittlinie ihrer Ebenen und die vorigen Schlüsse behalten Geltung, so daß auch hier dieselbe Ausdrucksform für die Centralprojection und die Centralcollineation ebener Systeme gilt.

Denkt man x'_1, x'_2, x'_3 als die Schnittpunkte der Geraden $a_2a'_3, a'_2a_3; a_3a'_1, a'_3a_1; a_1a'_2, a'_1a_2$ respective, so liegen die Punktgruppen $x_1x'_2x'_3, x_2x'_3x'_1, x_3x'_1x'_2$ in drei Geraden, die mit $x_1x_2x_3$ ein Vierseit bilden, das $x_1, x'_1; x_2, x'_2; x_3, x'_3$ zu den Gegeneckenpaaren hat. Jede der vier Geraden theilt mit dem Punkte s die ursprünglichen Segmente $a_1a'_1, a_2a'_2, a_3a'_3$ nach gleichem Doppelverhältnisse (Fig. 33).

Denkt man X'_1, X'_2, X'_3 als die Verbindungsgeraden der Punkte $A_2A'_3, A'_2A_3; A_3A'_1, A'_3A_1; A_1A'_2, A'_1A_2$, so gehen die Geraden $X_1X'_2X'_3, X_2X'_3X'_1, X_3X'_1X'_2$ durch drei Punkte, die mit dem Schnittpunkte von $X_1X_2X_3$ ein Viereck bilden, welches $X_1, X'_1; X_2, X'_2; X_3, X'_3$ zu den Paaren seiner Gegenseiten hat. Jeder der vier Punkte theilt mit der Geraden S die ursprünglichen Winkel $A_1A'_1, A_2A'_2, A_3A'_3$ nach gleichem Doppelverhältnisse.

42. Die centrischen Collineationen ebener Systeme sind nach der Lage ihrer Centra und Axen und nach den Werthen ihrer charakteristischen Doppelverhältnisse — als den Elementen, welche sie bestimmen — von einander verschieden. Als Quelle besonderer Fälle sind hervorzuheben: die Lage des Centrums in unendlicher Ferne, die Lage der Collineationsaxe oder die des Centrums und der Axe im Unendlichen; dazu die speciellen Werthe des Doppelverhältnisses. Ist zuerst das Centrum s einer unter den unendlich vielen unendlich entfernten Punkten der Ebene des Systems (Fig. 34), die nicht in der Axe liegen, so gilt die Relation

$$\{\infty\sigma aa'\} = \{\infty\sigma bb'\} \text{ d. i. } \sigma a' : \sigma a = \sigma b' : \sigma b = \text{const.};$$

die Paare entsprechende Punkte liegen auf den Strahlen einer Parallelschaar gegen eine feste Axe S so, daß die zwischen ihnen liegen-

den Segmente durch den zugehörigen Punkt der Axe in constantem Verhältnisse getheilt werden, d. h. sie bilden vereinigte projectivisch ähnliche Reihen. Die Paare entsprechender Geraden begegnen sich in der Axe und alle von demselben Punkte der Letzteren ausgehenden Paare bilden concentrische projectivische Büschel, die die Axe und den nach dem Centrum gehenden Strahl d. i. zwei Linien von constanter Neigung zu Doppelstrahlen haben und daher einander gleich sind. Die Gegenaxen der Systeme liegen in unendlicher Ferne. Daher sind alle entsprechenden Reihen in entsprechenden Geraden projectivisch ähnlich, nur das Ähnlichkeitsverhältniß ändert sich von einem Paare zum andern.

Die so characterisirte Beziehung ebener Systeme heißt Affinität in centraler Lage und entspricht der Parallelprojection ebener Systeme. Entsprechende Strecken gerader Linien sind in solchen Systemen stets gleichzeitig endlich, also auch alle entsprechenden Figuren immer zugleich geschlossen; einer Schaar von Parallelen entspricht stets wieder eine solche.

Der unendlich entfernten Lage der Collineationsaxe bei endlich entferntem Centrum entspricht die Beziehung ebener Systeme, welche man als Ähnlichkeit in centraler (ähnlicher) Lage bezeichnet. Man hat dann (Fig. 35) auf jedem Strahl durch das Centrum

$$\{s\infty aa'\} = \{s\infty bb'\} \text{ d. i. } sa : sa' = sb : sb'$$

und das gleiche Verhältniß für alle diese Strahlen. Die Paare entsprechender Geraden bilden Parallelen und alle gleichgerichteten Paare dieser Art somit zwei vereinigte projectivische Parallelenbüschel, deren einer Doppelstrahl durch das Centrum geht, während der andere unendlich entfernt ist. Die vereinigten projectivischen Reihen in den Strahlen durch das Centrum sind projectivisch ähnlich, die Gegenaxen also in unendlicher Ferne und auch alle andern entsprechenden Punktreihen projectivisch ähnlich. Entsprechende Strecken sind stets zugleich endlich, entsprechende Figuren zugleich geschlossen, entsprechende Winkel gleich groß. Diese Beziehung entspricht der Centralprojection eines ebenen Systems auf eine der seinigen parallele Ebene (§. 12) und es ist bei derselben zu unterscheiden, ob das Centrum auf einerlei Seite entsprechender Paare d. i. der Bild- und Originalebene oder auf verschiedenen Seiten derselben liegt.

Ist zugleich das Centrum und die Axe der Collineation unendlich entfernt, so erhält man Ähnlichkeit in ähnlicher Lage mit dem Ähnlichkeitsverhältniß $\infty a : \infty a' = +1$; alle Paare entsprechender Geraden sind projectivisch gleich, alle entsprechenden Winkel gleich groß: Die Systeme sind congruent, entsprechend der Parallelprojection des ebenen Systems auf eine ihm selbst parallele Ebene. Ist aber $sa : sa' = \pm 1$, so erhält man als Ähnlichkeit in ähnlicher Lage mit dem Verhältniß $+1$ die Deckung oder Congruenz und mit -1 die Symmetrie in Bezug auf ein Centrum (Fig. 35). Die Letztere entspricht der Centralprojection des ebenen Systems auf eine zu ihr parallele Ebene, die vom Centrum in entgegengesetztem Sinne ebenso weit entfernt ist, wie die Ebene des Systems. Endlich kann im Falle der Affinität $\sigma a : \sigma a' = -1$ sein; dann sind die beiden Systeme in orthogonaler oder schräger Symmetrie in Bezug auf die Axe S (Fig. 36).

43. Specielle Werthe des charakteristischen Doppelverhältnisses der Centralcollineation sind in den äußersten Specialisirungen des vorigen Paragraphen schon hervorgetreten und es erübrigt nur ihre Untersuchung im Falle der allgemeinen Lage des Centrums und der Axe.

Soll das Doppelverhältniß $\{s\sigma aa'\} = 0$ oder $= \infty$ werden, so sind die Relationen $sa = 0$, oder $\sigma a' = 0$; $sa' = 0$, $\sigma a = 0$ respective erforderlich, Voraussetzungen, die nicht weiter zu verfolgen sind. Ebenso bedingt $\{s\sigma aa'\} = +1$ die Relation $aa' = 0$; d. h. ein Doppelverhältniß kann nur in uneigentlicher Weise, nämlich durch Vereinigung zweier Elemente in eines einen der Werthe 0 , ∞ , $+1$ haben. Dagegen ist der specielle Werth -1 allgemein möglich. $\{s\sigma aa'\} = -1$ bedingt die innere und äußere Theilung des Paares $s\sigma$ durch das Paar aa' nach einerlei Verhältniß. Man findet dafür $\{s\sigma aa'\} = \{s\sigma a'a\}$, als charakteristisches Kennzeichen für dies besondere Doppelverhältniß oder die harmonische Theilung (§. 8, §. 21) und umgekehrt aus

$$\{s\sigma aa'\} = \{s\sigma a'a\} \text{ auch } \{s\sigma aa'\} = -1,$$

d. i. zwei Paare von Elementen constituiren ein harmonisches Gebilde, wenn die Elemente jedes Paares mit einander vertauscht werden können, ohne daß der

Werth ihres Doppelverhältnisses sich ändert¹⁾ und umgekehrt.

Im Sinne der in den letzten Paragraphen entwickelten Anschauung heißt dieß: In einer Centralprojection oder centraler Collineation ebener Systeme vom charakteristischen Doppelverhältniß -1 entspricht jedem Punkte oder Strahl der nämliche Punkt oder Strahl im andern System, ob man ihn als dem ersten oder dem zweiten System angehörig betrachtet; oder den vereinigten Punkten a, b' oder Strahlen A, B' entsprechen die vereinigten Punkte a', b oder Strahlen A', B . Wir nennen eine solche Central-Collineation oder Projection deshalb eine harmonische oder auch nach dem im nächsten Paragraphen Erörterten eine involutorische Centralcollineation und sagen, daß die beiden so auf einander bezogenen Systeme ein Involutionssystem in der Ebene bilden (Fig. 37).

Für die Bestimmung der Gegenaxen behält man

$$sr : \sigma r = \sigma u' : su' = -1,$$

d. h. die Punkte r und u' fallen in der Mitte der Strecke $s\sigma$ und damit die Gegenaxen in der Mitte zwischen dem Centrum s und der Collineationsaxe S zusammen. Daraus würde die Vertauschbarkeit des Entsprechens von Punkten und Geraden beider collinearen Systeme folgen, so wie umgekehrt das vertauschbare Entsprechen eines einzigen Paares von Elementen die angegebene Vereinigung der Gegenaxen nothwendig macht. Die Construction der entsprechenden Punktepaare zeigt, daß solche Paare immer entweder durch das Centrum oder durch die Axe (harmonisch) getrennt und auf einerlei Seite der Gegenaxe liegen; ebenso entsprechende Gerade. Die in den Schlußsätzen des §. 41 bezeichneten Geraden $x_1x'_2x'_3, x_2x'_3x'_1, x_3x'_1x'_2$ fallen mit $x_1x_2x_3$ und die Punkte $X_1X'_2X'_3$, etc. mit $X_1X_2X_3$ zusammen; der Werth des Doppelverhältnisses ist -1 .

44. Die vereinigten projectivischen Reihen, welche die auf einerlei Strahl aus dem Centrum liegenden entsprechenden Punkte-

¹⁾ Die gleichzeitige Vertauschung der Elemente beider Paare unter sich läßt jedes Doppelverhältniß ungeändert $\{abcd\} = \{badc\}$.

paare einer harmonischen Centralcollineation bilden und die vereinigten projectivischen Strahlenbüschel, welche die aus einerlei Punkt der Axe gehenden entsprechenden Strahlenpaare derselben bilden, nennt man als eine specielle Art vereinigter projectivischer Reihen oder Büschel Punktereihen und Strahlenbüschel in Involution. Involutorische Reihen und Büschel sind durch zwei Paare entsprechender Elemente z. B. a, a' ; b, b' bestimmt, weil durch die Vertauschung der Elemente eines Paares ein drittes Paar a', a gebildet wird. Sind c, c' zwei weitere entsprechende Elemente, so ist

$$\{abca'\} = \{a'b'c'a\} \text{ und somit } ac.ba'.b'c' = -a'c'.b'a.bc.$$

Für den Punkt r als die Vereinigung der Gegenpunkte beider Reihen oder den Centralpunkt der Involution ist

$$\{abr\infty\} = \{a'b'\infty r\} \text{ oder } ar.a'r = br.b'r = \pm q^2,$$

d. h. das Product der Abstände entsprechender Punkte der Involution vom Centralpunkt ist constant.

Für einen Doppelpunkt f ist

$$\overline{fr}^2 = \pm q^2 \text{ und } fr = q \sqrt{\pm 1},$$

die Doppelpunkte sind reell, wenn die Paare entsprechender Punkte auf einerlei Seite des Centralpunktes (dies ist der Fall der centralprojectivischen Involutionssysteme) und imaginär, wenn sie auf verschiedenen Seiten desselben liegen.

In Bezug auf die Strahlenbüschel in Involution, welche die entsprechenden Paare aus einem Punkte der Collineationsaxe bilden, bemerken wir vor Allem, daß die am Schlusse des §. 40 gegebene Construction ihrer entsprechenden Paare rectangulärer Strahlen wegen der Vereinigung der Gegenaxen nur ein einziges Paar R, R' liefert; man nennt die Strahlen desselben die Axen der Involution und sie sind offenbar die Halbierungslinien der von ihren Doppelstrahlen gebildeten Winkel (Fig. 37). Dasselbe Resultat erhält man aus der auf das Paar R, R' bezogenen Involutionsgleichung für ein beliebiges Strahlenpaar AA' , nämlich

$$\{RR'AB\} = \{R'RA'B'\};$$

denn sie gibt

$$\tan(R, A) \cdot \tan(R, A') = \tan(R, B) \cdot \tan(R, B') = \text{const.}$$

und für einen Doppelstrahl F also

$$\tan^2(R, F) = \text{const.};$$

unabhängig übrigens von der Realität der Doppelstrahlen. Ebenso gilt für die Doppelstrahlen F, F^* und ein beliebiges Paar die Relation

$$\{FF^*AA'\} = \{FF^*A'A\} = -1.$$

45. Vereinigte projectivische Reihen und Büschel, in denen die einzelnen Elemente einander vertauschbar entsprechen, lassen sich direct bei den allgemeinen Constructionen der §§. 26, 27 bilden und diese Quelle der involutorischen Elementargebilde liefert bemerkenswerthe Ergebnisse durch die Beziehung, in der sie zur Construction der Curven zweiter Ordnung und Classe steht. Aus drei Paaren $a, a'; b, b'; c, c'$ (Fig. 38) entsprechender Punkte von zwei projectivischen Reihen T, T' wurden durch die Gerade T'' der Schnittpunkte $bc', b'c; ca', c'a; ab', a'b$ alle übrigen Paare entsprechender Punkte bestimmt; die Punkte T'', T und T'', T' oder q, p' entsprechen dem Punkte T, T' oder p, q' , der den gegebenen Reihen gemeinschaftlich ist. Bildet man aus einem Punkte von T'' die über den Reihen $a, b, c, p, q, \dots; a', b', c', p', q'$ stehenden Strahlenbüschel, so hat man in ihnen concentrische vereinigte projectivische Büschel, in denen die Paare von Strahlen $P(Q'), P'(Q)$ einander vertauschbar entsprechen und die Construction des §. 26 zeigt, daß alle Strahlenpaare derselben einander vertauschbar entsprechen. Die Gerade T'' der Construction des §. 26 ist also der Ort der Scheitel involutorischer Strahlenbüschel, welche mit den Reihen T, T' perspectivisch sind (Fig. 38).

Aus drei Paaren $A, A'; B, B'; C, C'$ entsprechender Strahlen von zwei projectivischen Strahlbüscheln t, t' wurden in §. 27 durch den Schnittpunkt t'' der Geraden $BC', B'C; CA', C'A; AB', A'B$, die übrigen Paare entsprechender Strahlen derselben bestimmt; die Strahlen $t''t$ und $t''t'$ oder Q, P' entsprechen dem Strahl tt' oder P, Q' , der den beiden Büscheln gemeinsam ist. Bildet man auf einer Geraden durch t'' die den Büscheln $A, B, C, P, Q, \dots; A', B', C', P', Q' \dots$ perspectivischen Reihen, so sind sie vereinigte projectivische Reihen,

in denen die Paare $p(q')$, $p'(q)$ einander vertauschbar entsprechen und die Construction des §. 27 zeigt, daß alle Punktpaare derselben einander vertauschbar entsprechen. Der Punkt t'' der Construction des §. 27 ist der gemeinschaftliche Punkt der Träger der involutorischen Punktreihen, welche mit den Büscheln t , t' perspectivisch sind (Fig. 39). Sind insbesondere die projectivischen Büschel Parallelenbüschel, so ist der Punkt t' der gemeinschaftliche Centralpunkt aller so entstehenden Involutionen. Daß aber bei vereinigten projectivischen Gebilden die Vertauschbarkeit eines Paares entsprechender Elemente z. B. a , a' die aller andern solchen Paare nach sich zieht, folgt auch direct aus der Natur der Doppelverhältnisse. Denn sind a , b ; a' , b' entsprechende Gruppen und entsprechen sich a , a' vertauschbar, so entspricht auch dem Elemente b' als zum System a gehörig betrachtet das Element b im System a' ; weil für ein anderes Element β als das entsprechende

auch $\{aa'bb'\} = \{a'ab'\beta\}$ wäre und wegen $\{aa'bb'\} = \{a'ab'b\}$

$$\{a'ab'\beta\} = \{a'ab'b\}$$

sein, d. h. β mit b zusammenfallen müßte. Sonach können auch projectivische Grundgebilde von einerlei Träger stets durch eine bloße Lagenveränderung in involutorische Gebilde übergeführt werden, indem man die beiden Elemente derselben zur Deckung bringt, welche einem und demselben Elemente entsprechen; also bei Punktreihen durch die Vereinigung der Gegenpunkte, bei Strahlenbüscheln durch die Vereinigung der entsprechenden Paare von rechten Winkeln. In beiden Fällen ist die Überführung in doppelter Weise möglich; man bildet also aus den vereinigten projectivischen Gebilden involutorische von zweierlei Art, in denen die entsprechenden Paare gegen den Centralpunkt oder gegen die Axen verschiedene Lagen haben.

46. Die Consequenzen der Constructionen der §§. 26, 27 zeigen, wie diese Verschiedenheit der Lage mit der Realität der Doppelemente zusammenhängt. Zwei projectivische Strahlenbüschel erzeugen als Ort der Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen eine Curve zweiter Ordnung, für die die Geraden tt'' , $t't''$ die Tangenten in t , t' sind; die involutorische Reihe auf einer durch t'' gehenden Geraden hat ihre Schnittpunkte mit dieser Curve zu Doppelpunkten und die letztern sind reell oder ima-

ginär mit den ersteren. Bei reellen Doppelpunkten wird das Segment derselben durch jedes Paar von entsprechenden Punkten harmonisch getrennt und kein Paar entsprechender Punkte wird durch ein anderes getrennt; bei imaginären Doppelpunkten trennt jedes Paar alle anderen (Fig. 39).

Die Doppelstrahlen des involutorischen Büschels, das aus einem Punkte von T'' nach den Punkten der Reihen T, T' geht, sind die aus jenem Punkte möglichen Tangenten der Curve zweiter Classe, welche als die Umhüllung der Verbindungslinien ihrer entsprechenden Paare entsteht (Fig. 38). Das Verhalten entsprechender Paare in den Fällen reeller und imaginärer Doppelstrahlen genügt dem vorher für Reihen angegebenen Gesetze. Wegen der so erkannten Beziehung der Doppelemente der involutorischen Gebilde zur Ordnung ihrer entsprechenden Paare hat man jene auch die Ordnungselemente der Involution genannt.

47. Das vollständige Viereck und Vierseit ist nicht nur für specielle Linien und Punkte eine Quelle der harmonischen Theilung, sondern für alle eine Quelle der Involution. Ist $abcd$ das Viereck (Fig. 40) und sind u, v, w die Schnittpunkte seiner Paare von Gegenseiten bc, ad ; ca, bd ; ab, cd respective und schneidet eine Transversale dieselben Paare in x, x' ; y, y' ; z, z' respective, so beweist man jede Relation wie $\{xyzx'\} = \{x'y'z'x\}$ in derselben Art, indem man bemerkt, daß die Reihen $xyzx'$ und $xz'y'x'$ mit $xcba$ aus a und d respective perspectivisch sind,

$$\text{also } \{xyzx'\} = \{xz'y'x'\} \text{ und daher } \{xyzx'\} = \{x'y'z'x\}$$

ist. Es sind die Gruppen auf der Transversale aus zwei Ecken des Vierecks perspectivisch mit der auf derjenigen Seite desselben liegenden Reihe, die die beiden anderen Ecken verbindet; also $yacv$ aus b und d mit $yzx'y$ und $yx'z'y'$; $zabw$ aus c und d mit $zyxz'$ und $zx'y'z'$, etc.

Das dualistisch entsprechende gilt für das Vierseit (Fig. 41) der Geraden A, B, C, D mit den Verbindungslinien U, V, W seiner Paare von Gegenecken BC, AD ; CA, BD ; AB, CD für die Strahlenpaare X, X' ; Y, Y' ; Z, Z' aus einem beliebigen Punkte seiner Ebene nach diesen. Wenn die Transversale durch zwei Gegenseitenschnittpunkte geht oder der Scheitel des Büschels der Schnittpunkt von zwei

Verbindungslinien der Gegenecken ist, so kommt man auf die Beziehung der Doppelemente zu einem Paare der Involution, d. h. auf die harmonische Theilung zurück.

Diese Beziehungen dienen in der folgenden Ausdrucksweise vorzüglich bequem zur linearen Construction des sechsten Elementes einer Involution aus zwei Paaren und dem einen Elemente eines dritten Paares:

Wenn eine Gerade die Seiten bc , ca , ab eines Dreiecks abc in Punkten x , y , z schneidet, und Punkte x' , y' , z' in denselben respective so bestimmt werden, daß

$$\{xyzx'\} = \{x'y'z'x\}$$

ist, so gehen die Geraden ax' , by' , cz' durch einen und denselben Punkt d .

Wenn ein Punkt mit den Ecken BC , CA , AB eines Dreiecks ABC durch Gerade X , Y , Z verbunden und die Gruppe von Geraden X' , Y' , Z' durch ihn so bestimmt wird, daß

$$\{XYZZ'\} = \{X'Y'Z'Z'\}$$

ist, so liegen die Punkte AX' , BY' , CZ' in einer und derselben Geraden D .

Die Sätze von der Involution beim vollständigen Viereck und Vierseit sind specielle Fälle von Sätzen über die Curven zweiter Ordnung, welche vier gemeinschaftliche Punkte und die Curven zweiter Classe, welche vier gemeinschaftliche Tangenten haben. Denken wir eine der durch die Punkte a , b , c , d gehenden Curven zweiter Ordnung (Fig. 42) durch die Transversale, welche die Gegenseitenpaare bc , ad ; ca , bd desselben in x , x' ; y , y' schneidet, in Punkten z , z' getroffen, so liefert das Grundgesetz der Theorie der Curven zweiter Ordnung die Projectivität der aus b und a über d , c , z , z' stehenden Strahlenbüschel oder

$$\{b.cdzz'\} = \{a.cdzz'\},$$

also für den Schnitt mit der Transversale auch

$$\{xyzx'\} = \{y'x'zz'\} = \{x'y'z'z\}.$$

Alle diejenigen Curven zweiter Ordnung, welche dieselben vier Punkte enthalten, werden von einer beliebigen Geraden ihrer Ebene in Punktepaaren einer Involution geschnitten, zu der auch die Schnittpunkte derselben mit

(Fiedler.)

Alle diejenigen Curven zweiter Classe, welche dieselben vier Tangenten besitzen, bestimmen mit einem beliebigen Punkte ihrer Ebene Strahlenpaare einer Involution als Tangenten, zu der auch die Verbindungslinien desselben

den Paaren der Gegenseiten des Viereckes der vier Punkte gehören.	mit den Paaren der Gegenecken des Vierseits der vier Punkte gehören.
---	--

Die Doppelpunkte der durch die Gegenseitenpaare des Vierecks in einer beliebigen Geraden bestimmten Involution sind die Berührungspunkte der durch jene vier Punkte und mit der Geraden als Tangente möglichen Curven zweiter Ordnung; die Doppelstrahlen der durch die Gegeneckenpaare eines Vierseits an einem beliebigen Punkte bestimmten Involution sind ebenso die Tangenten der die vier Geraden berührenden und durch diesen Punkt gehenden Curven zweiter Classe.

48. Wenn durch den Scheitel eines involutorischen Strahlenbüschels eine Curve zweiter Ordnung geht, so bestimmen die Strahlen des Büschels mit ihr ein System von Punkten in Involution, nämlich ein System in Projectivität (§. 35), dessen Paare sich vertauschungsfähig entsprechen. Dasselbe ist durch zwei Paare $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'$ (Fig. 43) entsprechender Punkte bestimmt, weil man β', β als das dritte Paar kann, welches sie als projectivisch zur Bestimmung erfordern würden. Die Geraden $\alpha\beta', \alpha'\beta; \alpha\beta, \alpha'\beta'$ bestimmen zwei Punkte der Pascalschen Linie P des Systems und diese dient wie in §. 36 zur Construction aller andern entsprechenden Paare der Involution der Punkte der Curve und damit der Paare der Involution der Strahlen des Büschels; sie liefert auch durch ihre Schnittpunkte mit der Curve zweiter Ordnung die Doppelpunkte des Systems und die Doppelstrahlen des involutorischen Büschels. Wenn die entsprechenden Paare einander trennen, so erhält man, weil die Gerade P die Curve nicht schneidet, weder reelle Doppelpunkte noch Doppelstrahlen für das System.

Wenn der Träger einer involutorischen Reihe von einer Curve zweiter Classe berührt wird, so bestimmen die Punkte der Reihe mit dieser als Tangenten ein System von Strahlen in Involution, d. h. ein System, dessen Strahlen sich projectivisch (§. 35) und vertauschbar entsprechen. Dasselbe ist durch zwei entsprechende Paare $A, A'; B, B'$ bestimmt, weil B', B als drittes entsprechendes Paar anzusehen ist; die Paare von Schnittpunkten (Fig. 44) $AB', A'B; AB, A'B'$ bestimmen mit einander zwei durch den Brianchon'schen Punkt p des Systems gehende Gerade und der Punkt p dient dann wie in §. 37 zur Bestimmung jedes Strahls C' der involutorischen Tangentenschaar, welcher einem gegebenen Strahle C entspricht;

er liefert auch in den von ihm an die Curve gehenden Tangenten die Doppelstrahlen des Systems. Die Schnittpunkte der Strahlen des Systems mit dem Träger der gegebenen involutorischen Reihe liefern die ferneren Paare und die Doppelpunkte derselben. Natürlich dient der Kreis als Hilfscurve für die Ausführung dieser Constructionen, insoferne es sich um die Vervollständigung involutorischer Reihen oder Büschel handelt (Fig. 40, 41).

49. Wenn ein Winkel von constanter GröÙe sich um seinen Scheitel dreht, so erzeugen seine Schenkel entsprechende Paare $A, A'; B, B'; C, C';$ etc. von zwei projectivischen concentrischen Büscheln, weil $\{ABCD\} = \{A'B'C'D'\}$ ist; dem System der Punkte $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'$ im Kreise entspricht die unendlich entfernte Gerade als Pascal'sche Linie P . Ist der Winkel insbesondere ein Rechter, so ist das Entsprechen der Paare vertauschungsfähig, man hat $\{ABCA'\} = \{A'B'C'A\}$ und nennt die so gebildete Involution insbesondere eine Involution rechter Winkel. Jede andere Involution enthält nur ein Paar entsprechender rechtwinkliger Strahlen, ihre Axen (§. 44), und nach dem Vorigen ist eine Involution von Strahlen, in welcher zwei rechtwinkelige Paare existiren eine Involution rechter Winkel, d. h. alle ihre Strahlenpaare sind rechtwinklig. Für die rechtwinkelige Involution sind alle die Sehnen ihrer Punktpaare $\alpha, \alpha'; \beta, \beta';$ etc. im Kreise (Fig. 45) $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$ etc. Durchmesser dieses Kreises; die Gerade P ist die unendlich entfernte Gerade der Ebene wie vorher, d. h. die Doppelstrahlen concentrischer gleichwinkliger Büschel gehen wie die Doppelstrahlen der Involution rechter Winkel nach den (imaginären) Punkten, welche der (Hilfs-) Kreis mit der unendlich entfernten Geraden gemein hat. Da aber alle rechtwinkligen Involutionen einerlei involutorische Reihe der Richtungen ihrer Strahlen haben, der also auch immer dieselben Doppelpunkte zukommen, so muß jeder Kreis dieselben Punkte der unendlich fernen Geraden liefern, d. h. alle Kreise derselben Ebene gehen durch zwei feste imaginäre Punkte ω_1, ω_2 in unendlicher Ferne, die man daher als die (imaginären) Kreispunkte der Ebene bezeichnet¹⁾. Sie sind die Doppelpunkte der Involution der Richtungen aller rechtwinkligen Strahlenpaare der Ebene und die der

¹⁾ Darum können sich zwei Kreise nur in zwei reellen Punkten durchschneiden.

Projectivität der Richtungen aller Strahlenpaare der Ebene von constantem Richtungsunterschied bei gleichem Drehungssinn. Wir sprechen endlich auch von der Involution der Richtungen aller derjenigen Strahlenpaare, deren im bestimmten Sinn gemessene Winkel einerlei Richtung der Halbirungslinie haben. Bildet man für ein involutorisches Strahlenbüschel dieser Art das involutorische System $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'$ (Fig. 46) im Hilfskreis, so gehen die Sehnen $\alpha\alpha', \beta\beta'$ etc. durch einen festen Punkt (in unendlicher Ferne), analog dem Umstande, daß sie bei der Involution rechter Winkel durch den Mittelpunkt des Hilfskreises gehen. Denkt man von den betreffenden Figuren centralprojectivische Abbildungen gemacht, so erhält man aus der rechtwinkligen und der symmetrischen Involution von Strahlen Involutionen allgemeiner Art und erkennt, daß auch für diese die Sehnen der entsprechenden Paare der Involutionen in der Hilfscurve durch einen festen Punkt gehen müssen. Daß dies in der That eine allgemeine Eigenschaft involutorischer Systeme von Punkten auf einer Curve zweiter Ordnung ist, wird die Ausdehnung der Betrachtungen des §. 43 auf Curven zweiter Ordnung und zweiter Classe zeigen und zugleich, daß eine dualistisch entsprechende Eigenschaft für die Involutionen von Tangenten an Curven zweiter Classe besteht.

50. Kreise, welche durch zwei feste reelle oder imaginäre Punkte π_1, π_2 gehen (die nicht unendlich entfernt sind), bilden ein System von Kegelschnitten durch vier feste Punkte, werden somit von jeder Geraden in Paaren einer Involution geschnitten, welche die Berührungspunkte der Geraden mit Kreisen des Systems zu Doppelpunkten und den Schnittpunkt mit der Chordale oder Radicalaxe der Kreise zum Centrum hat¹⁾.

Insbesondere bestimmt der gemeinschaftliche Durchmesser des Systems der durch zwei reelle Punkte gehenden Kreise mit ihnen eine Involution ohne reelle Doppelpunkte (Fig. 47), die von den beiden gemeinschaftlichen Punkten aus durch rechtwinklige Involutionen projectirt wird. In jeder Ebene, welche durch den Träger einer Involution ohne reelle Doppelpunkte geht, gibt es um-

¹⁾ Drei Kreise in derselben Ebene werden von jeder Geraden durch ihr Radicalcentrum in sechs Punkten einer Involution geschnitten, die diesen Punkt zum Centralpunkt hat.

gekehrt zwei Punkte, aus denen sich die Involution durch ein Büschel von rectangulären Strahlenpaaren projecirt; alle diese Scheitel der rechtwinkligen Involutionen liegen in einem Kreise, der den Centralpunkt zum Mittelpunkt und die Constante q zum Maaß seines Halbmessers hat und dessen Ebene zum Träger der Involution normal ist. Er bildet den gemeinschaftlichen Schnitt eines Systems von Kugeln, die über den einzelnen Segmenten der Involution als Durchmesser beschrieben sind. Die Involution mit reellen Doppelpunkten hat eine analoge beachtenswerthe Eigenschaft (Fig. 48). Beschreibt man über dem Segment der Doppelpunkte als Durchmesser einen Kreis, so wird dieser von jedem über dem Segment eines Paares entsprechender Punkte als Durchmesser beschriebenen Kreise rechtwinklig durchschnitten; denn die aus einem der Schnittpunkte nach den Doppelpunkten und den Punkten dieses Paares gehenden Strahlen bilden ein harmonisches Büschel mit zwei Paaren rechtwinkliger Strahlen und es bildet daher jedes Paar mit jedem Strahle des anderen Paares gleiche Winkel.

51. Die Eigenschaft der involutorischen Reihen ohne reelle Doppelpunkte, die der vorige Paragraph enthält, führt zur Erledigung einer wichtigen Frage über das Verhältniß der Curven zweiter Ordnung und derjenigen zweiter Classe zu den Kegelschnitten (Collinearverwandten des Kreises) und unter einander; nämlich der Frage, ob alle Curven zweiter Ordnung auch Curven zweiter Classe sind und umgekehrt, oder ob alle diese Curven als Centralprojectionen oder Collinearverwandte des Kreises anzusehen seien?

In der durch zwei projectivische Strahlenbüschel t, t_1 erzeugten Curve zweiter Ordnung durch die Punkte a, b, c, d (Fig. 49) denken wir den Punkt t'' , durch den die Träger der involutorischen Reihen gehen (§. 45), legen durch diesen eine Gerade G mit einer Involution ohne reelle Doppelpunkte und bestimmen den Kreis der Scheitelpunkte der rechtwinkligen Involutionen. Projicirt man dann von einem Punkte π desselben als Centrum die erzeugenden Büschel der Curven zweiter Ordnung auf eine zur Ebene (π, G) parallele Ebene, so bilden in der Projection je zwei entsprechende Strahlen derselben einen rechten Winkel und die Projectionen der Büschel erzeugen einen Kreis. In der Figur ist der höchste Punkt des Kreises gewählt, so daß

die Ebene πb normal zur Ebene der Curve ist und als Aufrißebene betrachtet werden kann, wenn diese als Grundrißebene gilt. Die Ebene, auf welche die Projection zu bilden ist, liegt dann der Aufrißebene parallel, die Gerade S_1 ist ihre erste Spur. Die Scheitel t, t_1 projectiren sich in t', t'_1 als Durchmesserendpunkte des Kreises, auf dem die Bilder von a, b, c, d nämlich a', b', c', d' gelegen sind. Jede Curve zweiter Ordnung kann also als Kreis projectirt werden und ist also eine Collinearverwandte desselben und eine Curve zweiter Classe.

Zu der durch zwei projectivische Reihen T, T_1 erzeugten Curve zweiter Classe (Fig. 50) denken wir die Gerade T_2 , den Ort der Träger involutorischer Büschel; wird eines dieser Strahlenbüschel, welches keine reellen doppelten Strahlen besitzt, durch eine durch den gemeinschaftlichen Punkt pq' beider Reihen gehende Gerade G geschnitten, so entsteht in ihr eine Involution ohne doppelte Punkte, die aus den Punkten eines gewissen Kreises durch rechtwinklige Involutionen projectirt werden kann. Projectiren wir von einem Punkte π dieses Kreises das involutorische Büschel und die erzeugenden projectivischen Reihen auf eine zu (π, G) parallele Ebene, so hat die Projection der Curve die Eigenschaft, daß das Stück jeder Tangente zwischen zwei festen parallelen Tangenten — den Bildern von T, T_1 — von einem bestimmten Punkte aus — nämlich der Projection des Scheitels des involutorischen Strahlbüschels — unter rechtem Winkel gesehen wird. Liegt dieser Punkt in gleichem Abstände von den bezeichneten parallelen Tangenten, so wird die Projection der Curve nach §. 33 ein Kreis; um also die gedachte Curve zweiter Classe als Kreis zu projectiren, muß die Gerade G und der Scheitelpunkt des involutorischen Büschels auf T_2 durch T, T_1 harmonisch getrennt sein. In der Figur ist der höchste Punkt des Kreises als Projectionscentrum und die durch ihn und die Gerade G bestimmte Ebene als Aufrißebene, die Ebene der Curve als Grundrißebene gedacht. Die Träger T, T_1 der Reihen $a, b, c, d; a', b', c', d'$ sind als parallele Tangenten in T', T'_1 und die Gerade T_2 als der zugehörige Durchmesser in T'_2 auf die durch S_1 gehende der Aufrißebene parallele Ebene projectirt.

Man darf hiernach alle Curven zweiter Ordnung mit denen zweiter Classe als Kegelschnitte oder Collinearverwandte des Kreises oder als Curven zweiten Grades etwa

zusammenfassen und alle bisher von einer dieser Curvenarten entwickelten Eigenschaften gelten von ihnen allen.

52. Wenn man in einer involutorischen Centralcollineation auf drei durch das Collineationseentrum gehenden Geraden je ein Paar entsprechender Punkte $a, a'; b, b'; c, c'$ bestimmt, so ist nach den Eigenschaften des involutorischen Entsprechens $ab'ca'bc'$ ein Pascal'sches Sechseck und die drei Punktepaare liegen also auf einem Kegelschnitte und sind sechs Punkte einer Involution von Punkten desselben. Sind $a, a'; b, b'; c, c'$, etc. Paare einer Involution von Punkten eines Kegelschnittes, so gehen die Sehnen aa', bb', cc', dd' etc. durch einen und denselben Punkt s und die Sehnenpaare $ab', a'b; ac', a'c; ab, a'b'$ etc. schneiden sich in Punkten einer und derselben Geraden S (Fig. 51).

Wenn man in einer involutorischen Centralcollineation durch drei in der Collineationsaxe gelegene Punkte je ein Paar entsprechender Geraden $A, A'; B, B'; C, C'$ verzeichnet, so ist nach den Eigenschaften des involutorischen Entsprechens $AB'CA'BC'$ ein Brianchon'sches Sechseck, und die drei Paare von Geraden berühren also einen Kegelschnitt und sind sechs Strahlen einer Involution von Tangenten desselben. Sind $A, A'; B, B'; C, C'$ etc. Paare einer Involution von Tangenten eines Kegelschnittes, so liegen die Schnittpunkte AA', BB', CC' etc. auf einer und derselben Geraden S und die Paare der Schnittpunkte $AB', A'B; AC', A'C; AB, A'B'$ etc. liegen auf geraden Linien aus einem und demselben Punkte s (Fig. 52).

Man nennt jenen Punkt s das Centrum und diese Gerade S die Axe der Involution.

Wenn man in den Paaren entsprechender Punkte der Involution auf dem Kegelschnitte die Tangenten zieht, so bilden diese eine Involution von Strahlen nach dem Grundgesetze des §. 33 wie als entsprechende Gerade der involutorischen Centralcollineation, die sich paarweis in der Axe der Involution durchschneiden. Die Doppelpunkte der Involution $a, a'; b, b'$ etc. liegen auf der Axe S und sind zugleich die Berührungspunkte der Tangenten, welche vom Centrum der Involution an den Kegelschnitt gehen, sie sind mit diesen reell oder imaginär (Fig. 51).

Wenn man in den Paaren entsprechender Strahlen der Involution am Kegelschnitt die Berührungspunkte bestimmt, so bilden diese eine Involution von Punkten nach dem Grundgesetze des §. 33 wie als entsprechende Punkte der involutorischen Centralcollineation, die paarweis auf einer durch das Centrum der Involution gehenden Geraden liegen. Die Doppelstrahlen der Involution A, A', B, B' etc. gehen durch den Centralpunkt s und sind zugleich die Tangenten in den Punkten, welche die Axe S der Involution mit dem Kegelschnitte gemein hat; sie sind mit diesen reell oder imaginär (Fig. 52).

Das Centrum und die Axe der Involution, sei es nun von Punkten eines Kegelschnitts oder von Tangenten desselben, werden durch die Curve nämlich durch die Punkte- oder Tangentenpaare derselben harmonisch getrennt (§. 43):

Der Kegelschnitt bestimmt auf jedem durch das Centrum der Involution gehenden Strahl ein Punktepaar, welches das zwischen dem Centrum und der Axe der Involution gelegene Segment harmonisch theilt.

Der Kegelschnitt bestimmt mit jedem in der Axe der Involution liegenden Punkte ein Tangentenpaar, welches den an ihm durch das Centrum und die Axe der Involution bestimmten Winkel harmonisch theilt.

53. Durch die Existenz des Centrums und der Axe der Involutionen auf und an Kegelschnitten werden die allgemeinen Probleme leicht lösbar, welche dem Schlußproblem des §. 38 über projectivische Systeme für die involutorischen entsprechen.

Man erhält zuerst die gemeinschaftlichen Elemente von zwei Involutionen mit einerlei Träger (respective Gerade, Punkt, Kreis oder Kegelschnitt), indem man für die entsprechenden Involutionen auf einem Hilfskreis die Verbindungslinie ihrer Centra p, p^* oder den Schnittpunkt ihrer Axen P, P^* bestimmt, durch die Punkte oder die Tangenten des Kreises, welche demselben mit jener Verbindungslinie oder diesem Schnittpunkt gemeinschaftlich sind (Fig. 53). Die Bedingungen der Realität für die gemeinschaftlichen Elemente von zwei Involutionen ergeben sich leicht aus dieser Construction, lassen sich aber auch direct sehr einfach begründen. Unter den Specialfällen heben wir hervor: Die Construction der Axen einer Involution von Strahlen als des Paares derselben, welches sie mit einer rechtwinkligen Involution von demselben Träger gemein hat; die Construction des Paares einer Involution, welches ein gegebenes Halbirungselement besitzt, als des ihr mit einer symmetrischen Involution gemeinsamen Paares von Elementen; die Construction des Elementenpaares einer Involution, welches mit einem gegebenen Paar von Elementen ein harmonisches System bildet, und des Paares, welches mit zwei gegebenen Paaren von Elementen (der Doppelemente der zwei Involutionen) je ein harmonisches System bildet etc. Von Anwendungen liegen hier nahe: die Construction derjenigen durch je vier Punkte gehenden Kegelschnitte, welche sich auf einer gegebenen Geraden durchschneiden, oder welche einerlei Asymptotenrichtungen haben;

die Construction der Kegelschnitte durch vier Punkte, welche ein gegebenes Segment harmonisch theilen oder deren Asymptotenwinkel eine gegebene Halbirungsrichtung haben.

Man erhält ferner die Elemente $F, F'; F^*, F^{*'}$ einer Involution $A, B; A', B'$, welche zugleich in zwei projectivischen Gebilden $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}; \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$ von demselben Träger (Gerade, Punkt, Kreis oder Kegelschnitt) einander entsprechen, wie folgt: Man bildet die entsprechenden Punktesysteme auf einem Hilfskreis, nämlich $\alpha, \beta; \alpha', \beta'; a, b, c; a', b', c'$ und bestimmt mittelst des Centrums p der Involution $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ die den Elementen a, b, c entsprechende Elemente a'', b'', c'' der Involution; die Doppelpunkte $\varphi', \varphi^{*'}$ der projectivischen Systeme $a', b', c'; a'', b'', c''$ und die ihnen in der Involution vom Centrum p entsprechenden Elemente φ, φ^* bestimmen dann die gesuchten Paare von Elementen (Fig. 54).

Von den speciellen Formen dieses Problems sind hervorzuheben: die Construction der entsprechenden Paare rechtwinkliger Strahlen von zwei projectivischen Strahlensystemen, als die ihnen mit einer Involution rechter Winkel von demselben Träger gemeinschaftlichen Strahlen; die Construction entsprechender Elementenpaare projectivischer Systeme, welche mit zwei gegebenen Elementen (den Doppelpunkten einer Involution) ein harmonisches System bilden, oder die ein gegebenes Halbirungselement haben; die Construction der Paare einer Involution, welche einen gegebenen Winkel oder ein gegebenes Segment von bestimmtem Sinne zwischen sich fassen, oder der Paare letzterer Art, welche mit zwei gegebenen Elementen ein harmonisches System bilden; die Construction der Elemente, die mit zwei gegebenen ein harmonisches System und zugleich mit zwei andern gegebenen ein System von vorgeschriebenem Doppelverhältnisse bilden, etc.

54. Nach dem Vorigen wird zu jedem gegebenen Kegelschnitt für jeden gegebenen Punkt seiner Ebene als Centrum und ebenso für jede gegebene Gerade seiner Ebene als Axe eine Involution von Punkten und eine Involution von Tangenten respective bestimmt.

Ist ein vollständig verzeichneter Kegelschnitt und ein Punkt seiner Ebene gegeben, so bestimmen die durch den letzteren gehenden Geraden auf dem Kegelschnitt die entsprechen-

Ist ein vollständig verzeichneter Kegelschnitt und eine Gerade seiner Ebene gegeben, so bestimmen die Punkte der letzteren mit dem Kegelschnitt die entsprechenden Paare einer

den Paare einer Involution von Punkten und die in diesen den Kegelschnitt berührenden Tangenten die Paare eine Involution von Strahlen. Die Schnittpunkte der Verbindungslinien ab , $a'b'$; ab' , $a'b$ etc. der erstern und die der entsprechenden Paare von Strahlen der letzteren liegen in einer Geraden, die durch den Kegelschnitt von dem gegebenen Punkte harmonisch getrennt wird.

Involution von Strahlen und die Berührungspunkte derselben mit dem Kegelschnitt die Paare einer Involution von Punkten. Die Verbindungslinien der Schnittpunkte AB , $A'B'$; AB' , $A'B$ etc. der erstern und die der entsprechenden Paare von Punkten der letzteren gehen durch einen Punkt, der durch den Kegelschnitt von der gegebenen Geraden harmonisch getrennt wird.

Die Doppelemente dieser Involutionen sind die der Geraden mit dem Kegelschnitt gemeinsamen Punkte und die dem Punkte mit dem Kegelschnitt gemeinsamen Tangenten. Diese Gerade und dieser Punkt sind Axe und Centrum einer Centralcollineation, in welcher der Kegelschnitt sich selbst entspricht, nämlich jedem seiner Punkte der mit ihm auf demselben Strahl aus dem Centrum gelegene Punkt und jeder seiner Tangenten die mit ihr in der Axe sich durchschneidende Tangente. Darnach kann jeder Kegelschnitt für jeden Punkt seiner Ebene als Centrum ebenso wie für jede Gerade seiner Ebene als Axe als sich selbst collinear oder speciell involutorisch angesehen werden. Zugleich zeigt die Anschauung dieser Beziehung als einer centralprojectivischen Darstellung, daß die Halbirungslinie aller auf den Strahlen vom Centrum bis zur Axe gemessenen Strecken als die Gegenaxe der Systeme, auch je ein Paar Gegenecken aller der Parallelogramme enthält, welche die vom Centrum ausgehenden Parallelen zu einem Paar entsprechender Geraden mit diesen selbst bilden.

55. In Bezug auf einen Kegelschnitt entspricht somit jedem Punkt seiner Ebene als Centrum eine Gerade derselben als Axe der Involution und jeder Geraden als Axe ein Punkt als Centrum derselben. Man bezeichnet die so einem Punkte entsprechende Gerade als die Polare des Punktes und den Punkt selbst als den Pol dieser Geraden in Bezug auf den Kegelschnitt. Nach dem vorigen Paragraphen hat man folgende Constructionsmittel für den Übergang vom Pol zur Polare und umgekehrt (Fig. 55).

Man erhält die Polare P eines Punktes p in Bezug auf einen Kegelschnitt durch eine von ihm ausgehende den Kegelschnitt (in a, a') schneidende Gerade als die gerade Verbindungslinie des dem Pole harmonisch conjugirten vierten Punktes p' in ihr mit dem Schnittpunkte der beiden Tangenten des Kegelschnitts in den mit ihr gemeinsamen Punkten a, a' ; man erhält sie mittelst zweier den Kegelschnitt (in a, a' ; b, b' respective) schneidenden Geraden aus dem Pol als die Verbindungslinie der vierten harmonischen Punkte in denselben, oder als die der Schnittpunkte der Tangentenpaare des Kegelschnitts in den mit ihnen gemeinsamen Punkten oder als die der Schnittpunkte der entsprechenden Sehnen $ab', a'b$; $ab, a'b'$ zwischen den nicht entsprechenden Punktepaaren der Curven auf beiden Geraden.

Man erhält den Pol p einer Geraden P in Bezug auf einen Kegelschnitt durch die von einem in ihr gelegenen Punkt an den Kegelschnitt gehenden Tangenten A, A' als Schnittpunkt des der Polare harmonisch conjugirten vierten Strahles P' aus ihm mit der Sehne der Berührung des Kegelschnitts in den gedachten Tangenten A, A' ; man erhält ihn mittelst der Tangentenpaare (A, A' ; B, B' respective) des Kegelschnitts aus zwei verschiedenen Punkten der Polare als Schnittpunkt der beiden vierten harmonischen Strahlen aus denselben, oder als den der Berührungssehnen, welche jenen Tangentenpaaren entsprechen, oder als den Schnittpunkt der Verbindungslinien der entsprechenden Schnittpunkte $AB', A'B$; $AB, A'B'$ der nicht entsprechenden Tangentenpaare aus beiden Punkten.

Diese Constructionen zeigen zugleich, wie die beiden Sätze des §. 31 über das einer Curve zweiter Ordnung eingeschriebene Viereck und das einer Curve zweiter Classe umgeschriebene Vierseit (Fig. 19) durch die Theorie der Involution verbunden sind.

In jedem einem Kegelschnitte eingeschriebenen Viereck ist die Verbindungslinie eines Paares von Gegenecken die Polare des Durchschnittspunktes der Verbindungslinie der beiden andern Paare in Bezug auf den Kegelschnitt. Die drei Verbindungslinien der Paare der Gegenecken sind in Bezug auf alle dem Viereck umgeschriebenen Kegelschnitte ein System von drei harmonischen Polaren, d. h. jede von ihnen ist die Polare des Durchschnittspunktes der beiden andern in Bezug auf alle diese Kegelschnitte (Fig. 55).

In jedem einem Kegelschnitte umgeschriebenen Vierseit ist der Durchschnittspunkt eines Paares von Gegenseiten der Pol der Verbindungslinie der Durchschnittspunkte der beiden andern Paare in Bezug auf den Kegelschnitt. Die drei Durchschnittspunkte der Paare der Gegenseiten sind in Bezug auf alle dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte ein System von drei harmonischen Polen, d. h. jeder von ihnen ist der Pol der Verbindungslinie der beiden andern in Bezug auf alle diese Kegelschnitte (Fig. 55).

Die Dreiecke und Dreiseite, welche diese Systeme bilden, werden auch als in Bezug auf den Kegelschnitt sich selbst conjugirt bezeichnet.

• 56. Dieselben Constructionen liefern die Sätze:

Die Polaren aller Punkte einer Geraden P in Bezug auf einen Kegelschnitt gehen durch den Pol p dieser Geraden.

Die Pole aller der durch einen Punkt p gehenden Geraden in Bezug auf einen Kegelschnitt liegen auf der Polare P dieses Punktes.

Die Reihe der Pole in der Polare und das Büschel der entsprechenden Polaren aus dem Pol sind projectivisch. Insbesondere ist jede Tangente eines Kegelschnitts die Polare ihres Berührungspunktes in Bezug auf ihn und jeder Punkt des Kegelschnitts der Pol der zugehörigen Tangente. Die Punktreihe in der Tangente und das Strahlenbüschel der ihr entsprechenden Polaren aus dem Berührungspunkte sind projectivisch (§. 33, Fig. 21).

- Nach diesen Gesetzen läßt sich zu jeder Figur in der Ebene eines Kegelschnitts eine in Bezug auf diesen ihr entsprechende Figur ableiten, in welcher jedem Strahlenbüschel der ersten eine ihr projectivische Punktreihe der zweiten und umgekehrt entspricht. Man nennt sie die Polarfigur der ersten und da die Beziehung von zwei solchen Figuren zu einander nach dem Vorigen eine gegenseitige ist, so nennt man auch beide reciproke Polarfiguren in Bezug auf den Kegelschnitt und diesen Letzteren die Directrix der Polarreciprocität. Die Figur eines geometrischen Satzes gibt der eines neuen Satzes den Ursprung. Alle die Sätze, welche im Vorigen aus viel allgemeineren Gründen als nach dem Principe der Dualität einander entsprechend sich ergeben haben, lassen sich auch als Ausdrücke solcher polarreciproken Figuren ansehen und vom Principe der Reciprocität aus beweisen. Die Polarfigur einer Curve zweiter Classe in Bezug auf einen Kegelschnitt ist eine Curve zweiter Ordnung; die Construction der ersteren mittelst projectivischen Punktreihen auf zweien ihrer Tangenten führt auf die Construction der Letzteren mittelst der projectivischen Strahlenbüschel aus zweien ihrer Punkte; der Satz von Pascal liefert den Satz von Brianchon, etc.¹⁾

1) Auf Grund des §. 13 läßt sich leicht eine vollständige Theorie der polar-reciproken Figuren in Bezug auf einen festen (imaginären) Kreis entwickeln, die dadurch besondern Werth für den hier verfolgten Plan hat, daß sie zugleich die Theorie der Kegelflächen ganz im Zusammenhang mit dem hier Gegebenen vollendet.

57. Alle Geraden eines ebenen Strahlenbüschels ordnen sich in Bezug auf einen beliebigen Kegelschnitt in seiner Ebene so in Paare, daß die eine Gerade jedes Paares den Pol der andern in Bezug auf den Kegelschnitt enthält; ebenso ordnen sich die Punkte einer geradlinigen Reihe in Bezug auf einen Kegelschnitt derselben Ebene in Paare, von denen stets der eine in der Polare des andern in Bezug auf jenen liegt. Weil alle diese Paare durch den Kegelschnitt harmonisch getrennt sind, so nennt man sie conjugirte Strahlen- und Punktepaare, oder Paare harmonischer Pole und harmonischer Polaren. Sie bilden immer eine Involution, deren Doppелеlemente dem Kegelschnitt angehören.

Wenn der Scheitel des Büschels der harmonischen Polaren der Pol der Geraden der harmonischen Pole ist, so ist das eine der Schnitt oder Schein des andern. Jeder Punkt der Reihe ist der Pol eines entsprechenden Strahles im Büschel und gibt mit ihm Centrum und Axe einer involutorischen Centralcollineation, in welcher der Kegelschnitt sich selbst entspricht und für welche die Mittellinie zwischen Centrum und Axe der Ort der Scheitel der Strahlenbüschel des einen Systems ist, welchen Parallelenschaaren im andern entsprechen.

Einige Specialfälle der vorigen allgemeinen Ergebnisse sind von besonderem Interesse; zuerst solche, in welchen der Träger der Involution harmonischer Pole oder Polaren eine specielle nämlich unendlich entfernte Lage hat und sodann solche, in denen diese Involution selbst eine specielle ist, nämlich eine Involution rechter Winkel.

Denken wir einen unendlich fernen Punkt als Centrum der Involution an einem Kegelschnitt (Fig. 56), so liegen die entsprechenden Punktepaare derselben auf Parallelen, für welche jener Punkt die gemeinsame Richtung ist; die Axe derselben Involution, d. i. die Polare des unendlich entfernten Punktes enthält die Halbierungspunkte aller in jenen Parallelen vom Kegelschnitt begrenzten Segmente, ihre Richtung und die der Sehnen sind harmonische Pole in der unendlich entfernten Geraden. Man nennt in diesem Falle insbesondere die Axe der Involution einen Durchmesser des Kegelschnitts und sagt, daß derselbe der Richtung jener Sehnen conjugirt sei, die er halbirt. Die Tangenten des Kegelschnitts in seinen Endpunkten sind den letzteren parallel und die beiden zu ihm selbst parallelen Tangenten haben ihre Berührungspunkte in einer solchen Sehne. Da diese letztere die Polare der Richtung des

vorbetrachteten Durchmessers ist, so halbirt sie ihn ebenso, wie sie von ihm selbst halbirt wird; sie ist der zur Richtung des vorigen conjugirte d. h. alle zu ihm parallelen Sehnen halbirende Durchmesser. So führt jeder unendlich entfernte Punkt zu dem ihm conjugirten unendlich entfernten Punkte und zu zwei einander und den gleichgerichteten Sehnen respective conjugirten Durchmessern. Alle Durchmesser gehen durch den Pol der unendlich entfernten geraden Punktreihe und bilden ein involutorisches Büschel harmonischer Polaren oder von Paaren conjugirter Durchmesser. Auf jedem Durchmesser liegt eine Involution harmonischer Pole, die ihre Doppelpunkte im Kegelschnitt und ihren Centralpunkt in dem Schnittpunkt aller Durchmesser hat, den man daher das Centrum des Kegelschnitts nennt. Von fünf gegebenen Punkten führt die zweimalige Anwendung des Pascalschen Sechsecks durch wenige Linien zur Bestimmung von zwei Paaren conjugirter Durchmesser. Die Gesetze, welche die Paare der conjugirten Durchmesser verbinden, ergeben sich als specielle Fälle der Involution ohne Schwierigkeit: das Dreieck, welches ein Paar von conjugirten Halbdurchmessern der Ellipse mit der seine Endpunkte verbindenden Sehne bildet, ist von constanter Fläche. Wenn zwei conjugirte Halbdurchmesser durch Parallelen auf eine zur Richtung der letzteren conjugirte Gerade projecirt werden, so ist die Summe (oder Differenz für die Hyperbel) der Quadrate ihrer Projectionen von einem Paar zum andern unveränderlich; insbesondere ist die Summe (Differenz für die Hyperbel) der Quadrate von zwei conjugirten Durchmessern eine constante Größe.

58. Die Involution der Paare conjugirter Durchmesser hat, weil sie mit der Involution der Paare harmonischer Pole in der unendlich entfernten Geraden perspectivisch ist, mit dieser zugleich reelle oder imaginäre Doppelemente; sie hat daher im Falle der Hyperbel (Fig. 57) reelle und im Falle der Ellipse (Fig. 58) imaginäre Doppelstrahlen; im Falle der Hyperbel trennen die Paare conjugirter Durchmesser einander nicht, im Falle der Ellipse trennt jedes Paar alle andern Paare derselben. Die Doppelstrahlen der Involution conjugirter Durchmesser sind die vom Centrum an den Kegelschnitt gehenden oder ihn in seinen unendlich fernen Punkten berührenden Tangenten,

d. h. die Asymptoten des Kegelschnitts. Die Asymptoten trennen jedes Paar der conjugirten Durchmesser harmonisch. Im Falle ihrer Realität ist von je zwei conjugirten Durchmessern der eine durch die Curve begrenzt, der andere nicht; im Falle der Ellipse sind alle Durchmesser durch die Curve begrenzt. Die Axen der Involution der conjugirten Durchmesser, d. i. die das rechtwinklige Paar derselben bildenden Durchmesser, nennt man die Axen des Kegelschnitts¹⁾. Sie sind die Halbirungslinien (Fig. 58) der von den Asymptoten gebildeten Winkel und im Falle der Ellipse (Fig. 57) beide begrenzt, während es im Falle der Hyperbel nur die eine ist. Die Tangenten des Kegelschnitts in ihren Endpunkten oder den Scheiteln der Curve sind rechtwinklig zu ihnen.

Von besondern Fällen dieser allgemeinen Gesetze sind vorzüglich bemerkenswerth der der gleichseitigen oder rectangulären Hyperbel, der des Kreises und der der Parabel. Da die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel rechtwinklig zu einander sind, so fallen sie als mit jedem Paare conjugirter Durchmesser ein harmonisches Büschel bildend mit den Halbirungslinien der Winkel der conjugirten Durchmesserpaare zusammen, die Involution der conjugirten Durchmesser bildet also zwei gleichwinklige Strahlenbüschel mit entgegengesetztem Drehungssinn. In Folge dessen sind auch die über den Punkten der gleichseitigen Hyperbel aus den Endpunkten eines Durchmessers gebildeten Strahlenbüschel einander gleich; weil als Specialfälle der Sätze des §. 55 vom Viereck und Vierseit die Sätze gelten:

In jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Parallelogramm sind die Parallelen zu den Seiten aus dem Schnittpunkte der Diagonalen zwei conjugirte Durchmesser.

In jedem einem Kegelschnitte umgeschriebenen Parallelogramm sind die Diagonalen zwei conjugirte Durchmesser des Kegelschnittes.

Ebenso ergibt sich von hier aus die allgemeine Theorie der Supplementarsehnen. Sodann der specielle Fall des Kreises, der dann eintritt, wenn die Involution der Paare conjugirter Durchmesser eine

¹⁾ Durch Anwendung der Construction der zweiten Hauptaufgabe des §. 53 bestimmt man leicht auch ein Paar conjugirter Durchmesser, die einen gegebenen Winkel einschließen und durch die der ersten diejenigen, die eine gegebene Halbirungslinie haben.

rechtwinklige Involution ist. Wenn es zwei Paare conjugirter Durchmesser gibt, die rechtwinklig zu einander sind, so sind alle Paare derselben zu einander rechtwinklig. Und daß zwei Paare von rechtwinkligen conjugirten Durchmessern mit einem beliebigen Punkte als Punkt der Curve nur einen Kreis bestimmen, ergibt sich aus der Überlegung, daß zu jedem Punkte der Curve mittelst eines Paares ihrer conjugirten Durchmesser drei andere Punkte bestimmt sind als die Ecken eines Parallelogramms, welches ihn zur einen Ecke hat und dessen Seiten respective parallel zu den conjugirten Durchmessern und durch sie halbirt sind. Mittelst zwei rechtwinkligen Paaren erhält man daher zu einem gegebenen sechs neue Punkte, die zugleich auf einem Kreise und auf dem Kegelschnitt gelegen sind und somit die Identität des Letztern mit dem Kreise fordern. Im Kreise halbirt jeder Durchmesser die zu ihm rechtwinkligen Sehnen. Die Doppelstrahlen der Involution rechter Winkel an seinem Mittelpunkt, d. i. die nach den imaginären unendlich entfernten Punkten des Kreises (§. 49) gehenden Geraden, sind seine Asymptoten.

Endlich der Fall der Parabel. Da sie die unendlich entfernte Gerade ihrer Ebene berührt, so ist der Pol derselben oder das Centrum der Parabel der Berührungspunkt der unendlich entfernten Geraden mit der Curve, also selbst unendlich entfernt. Die Durchmesser der Parabel sind daher einander parallel und alle ihre conjugirten fallen mit der unendlich fernen Geraden zusammen. Unter den Durchmessern ist einer auf den ihm conjugirten und somit von ihm halbirt Sehnen rechtwinklig; dieser heißt die Axe und sein endlich entfernter Schnittpunkt mit der Curve der Scheitel derselben.

59. Die Frage nach den rechtwinkligen Involutionen unter den Involutionen der harmonischen Polaren aus Punkten in der Ebene des Kegelschnittes führt zu der Erkenntniß, daß nur eine beschränkte Zahl von besonders gelegenen Punkten Scheitel solcher involutorischer Büschel sind; man nennt sie die Brennpunkte, ihre Polaren in Bezug auf den Kegelschnitt die Directrixen des Kegelschnitts und ihre Lage und Construction sowie ihre hauptsächlichsten Eigenschaften ergeben sich durch die folgenden Betrachtungen.

Weil die Involution rechter Winkel keine reellen Doppelstrahlen und daher die Involution harmonischer Pole in der Directrix, welche ihr Schnitt in dieser ist, keine reellen Doppelpunkte hat, so können die Brennpunkte nur so liegen, daß keine reellen Tangenten von

ihnen an den Kegelschnitt möglich sind, und die Directrixen den Kegelschnitt nicht schneiden. Da ferner nach §. 49 die Doppelstrahlen der Involution rechter Winkel nach den imaginären Kreispunkten im Unendlichen gehen, so sind die Brennpunkte als die Durchschnittpunkte der von diesen letzteren an den Kegelschnitt gehenden Tangenten und die Directrixen als die zugehörigen Berührungssehnen zu betrachten. Darum fallen jene im Centrum zusammen und diese in die unendlich entfernte Gerade, wenn der Kegelschnitt die imaginären Kreispunkte selbst enthält, d. i. wenn er ein Kreis ist. Das Centrum desselben ist der Scheitel der einzigen rechtwinkligen Involution harmonischer Polaren in seiner Ebene. Die Brennpunkte können jedenfalls nur in den Axen der Curve liegen, weil sonst der zugehörige Durchmesser und die von ihm in dem Brennpunkte halbirte Sehne ein schiefwinkliges Paar in einer rechtwinkligen Involution geben würden. Um ihre Lage in denselben zu bestimmen, denken wir (Fig. 59) eine Schaar von parallelen Geraden, welche zu keiner der Axen parallel sind und in dem ihrer Richtung conjugirten Durchmesser die Reihe der Pole derselben; wir fällen von letzteren auf jene die Perpendikel, welche eine der ursprünglichen Parallelen-schaar projectivische Schaar bilden und daher mit ihr in jeder der Axen zwei projectivische Reihen bestimmen; da aber in den letzteren das Centrum der Curve und der unendlich ferne Punkt der bezüglichen Axe einander vertauschbar entsprechen, so sind diese Reihen insbesondere involutorisch und werden durch ein einziges Paar entsprechender Punkte, also mittelst einer Tangente der Curve und der zugehörigen Normale im Berührungspunkte bestimmt. Die Doppelpunkte der so in den Axen bestimmten involutorischen Reihen sind die Scheitel der rechtwinkligen Involutionen harmonischer Polaren, weil durch jeden von ihnen außer dem Paar der Axe und der zu ihr rechtwinkligen Sehne noch ein zweites rechtwinkliges Paar geht, nämlich die bezüglichen Strahlen der vorbetrachteten Parallelenbüschel. Sie liegen in jeder Axe gleich weit vom Centrum und sind in der einen reell und in der andern imaginär, weil in der einen die Paare der entsprechenden Punkte der Involution auf einerlei Seite des Centrums, in der andern aber auf verschiedenen Seiten desselben liegen und hier also die Paare durch einander getrennt sind. Zugleich sind die reellen Brennpunkte

die Scheitel der rechtwinkligen involutorischen Büschel, welche über der Involution in der andern Axe (Fig. 59; $a, a'; b, b'$) stehen. Man nennt die Axe der reellen Brennpunkte die Hauptaxe des Kegelschnitts. Da zu einer reellen Polare ein reeller Pol gehört, so entsprechen nur den reellen Brennpunkten reelle Directrixen, welche nothwendig symmetrisch gegen das Centrum und rechtwinklig zur Hauptaxe liegen. Brennpunkt und Directrix werden durch die Endpunkte der Hauptaxen harmonisch getrennt.

60. Wenn man für einen beliebigen Punkt t in der Ebene eines Kegelschnittes (Fig. 60) die Involution der harmonischen Polaren, ihre Axen und ihre Doppelstrahlen denkt, so bestimmen die ersteren in der Axe des Kegelschnittes Paare der im vorigen Paragraphen betrachteten Involutionen und da somit die von t nach den Brennpunkten f, f^* gehenden Geraden mit ihnen ein harmonisches Büschel bilden, so sind jene die Halbirungslinien der Winkel dieser letzteren; und da die Strahlen des rechtwinkligen Paares auch mit den Doppelstrahlen der Involution, d. i. mit den von t ausgehenden Tangenten des Kegelschnitts ein harmonisches Büschel bilden, so halbiren sie auch die Winkel dieser letzteren und man erhält den Satz: die Tangenten von einem Punkte an den Kegelschnitt und die Verbindungslinien desselben mit den Brennpunkten des letztern bilden Winkel von derselben Halbirungslinie oder jene sind gegen diese gleich geneigt. Und für die Lage von t in der Peripherie des Kegelschnitts: die Tangente und die Normale in einem Punkte des Kegelschnitts halbiren die Winkel der Geraden, die ihn mit den Brennpunkten desselben verbinden. Für den Kreis insbesondere: zwei Tangenten bilden mit dem nach ihrem Schnittpunkt gehenden Durchmesser gleiche Winkel; die Tangente ist rechtwinklig zum Radius des Berührungspunktes. Denkt man den Durchschnittpunkt einer Tangente mit der Directrix und den Berührungspunkt derselben mit dem entsprechenden Brennpunkt verbunden, so sind die Verbindungslinien harmonische Polaren und daher zu einander rechtwinklig: das Stück einer Kegelschnittstangente vom Berührungspunkte bis zur zugehörigen Directrix erscheint vom zugehörigen Brennpunkte aus unter rechtem Winkel.

Wenn zwei feste Tangenten von einer beweglichen Tangente des Kegelschnitts geschnitten werden, so bestimmen die in ihnen entstehenden projectivischen Reihen am Brennpunkt zwei projectivische Strahlenbüschel, deren Doppelstrahlen die vom Brennpunkt an den Kegelschnitt gehenden Tangenten, d. i. die Strahlen nach den imaginären Kreispunkten im Unendlichen sind; somit (§. 49) sind diese vereinigten projectivischen Büschel gleichwinklig, d. h. das zwischen zwei festen Tangenten enthaltene Stück e_1e_2 (Fig. 60) einer beweglichen Tangente eines Kegelschnittes erscheint vom Brennpunkt aus unter constantem Winkel. Der elementare Satz des §. 33 ist also eine Brennpunkteigenschaft des Kreises. Dies erlaubt die Construction eines Kegelschnittes aus drei Tangenten und einem Brennpunkte, welche möglich sein muß, weil der Brennpunkt die zwei von ihm an die Curve gehenden Tangenten bestimmt. Für die festen Tangenten als Scheiteltangenten der Hauptaxe ist der constante Winkel ein rechter und der Satz liefert die Construction des Kegelschnitts aus einer Tangente bei gegebenen Scheiteln und Brennpunkten. Es ist ein fernerer Specialfall des vorigen Satzes, daß die gerade Linie, welche den Schnittpunkt t von zwei Tangenten in den Punkten a und b des Kegelschnitts mit dem Brennpunkt f verbindet, den Winkel afb der Geraden vom Brennpunkt nach den Berührungspunkten halbt. Die Halbierungslinie des zweiten Winkels derselben Geraden geht nach dem Schnittpunkt c der Berührungssehne ab mit der entsprechenden Directrix.

61. Nach dem Vorigen sind (Fig. 60) die Punkte a und b durch die Gerade tf und die Directrix in c harmonisch getrennt (die Gleichheit $\angle aft = \angle tfb$ folgt auch daraus); wenn man also durch a und b Parallelen zu tf bis zur Directrix in a_1, b_1 und Perpendikel zu ihr mit den Fußpunkten a_2, b_2 zieht und mit t_1 den Schnittpunkt der Directrix mit tf bezeichnet, so sind auch a_1 und b_1 durch t_1 und c harmonisch getrennt und da t_1f und fc zu einander rechtwinklig sind, so ist auch $\angle a_1ft_1 = \angle t_1fb_1$. In Folge dessen ist

$$\Delta a_1af \sim \Delta b_1bf \text{ und also } a_1a : b_1b = a_2a : b_2b = af : bf,$$

d. h. das Verhältniß des Abstandes vom Brennpunkte und von der zugehörigen Directrix ist für alle Punkte des Kegelschnitts von demselben Werthe; es bleibt

auch von einem Brennpunkte zum andern dasselbe. Sind für einen Punkt der Curve seine Brennpunktsabstände r_1, r_2 und seine Abstände von den respective zugehörigen Directrixen d_1, d_2 , so folgt aus

$$d_1 : d_2 = r_1 : r_2 = \text{const. auch } d_1 \pm d_2 : r_1 \pm r_2 = \text{const.};$$

und da in der Ellipse die Summe der Directrixabstände eines Punktes, in der Hyperbel die Differenz derselben eine Constante nämlich der Abstand der Directrixen selbst ist, so folgt, daß in der Ellipse die Summe und in der Hyperbel die Differenz der Radienvectoren constant sein muß; die Betrachtung der Scheitel insbesondere zeigt, daß sie der Hauptaxe gleich ist. Alle Punkte des Kreises sind vom Centrum gleichweit entfernt. Mitteltst eines Paares von congruenten Dreiecken ergibt sich auch, daß die Fußpunkte der von den Brennpunkten auf die Tangenten gefällten Perpendikel in diesen auf dem Kreise liegen, der die Hauptaxe zum Durchmesser hat etc.

Im Falle der Parabel fällt einer der reellen Brennpunkte mit dem unendlich fernen Punkte der Curve und die zugehörige Directrix mit der unendlich fernen Geraden zusammen; das constante Verhältniß $d_1 : r_1$ ist der Einheit gleich, d. h. ihre Punkte sind vom Brennpunkt und der Directrix gleich weit entfernt. Die Directrix ist der Ort der Schnittpunkte der rechtwinkligen Tangentenpaare. Der Winkel von zwei Tangenten ist halb so groß wie der Winkel, den ihre Berührungspunkte am Brennpunkt bestimmen. Die Fußpunkte der vom Brennpunkt auf die Tangenten gefällten Perpendikel liegen in der Scheiteltangente der Parabel.

62. Die Eigenschaften der Kegelschnitte in Bezug auf das Centrum, die Axen, die Brennpunkte und Directrixen sind nicht projectivische, sondern metrische Eigenschaften; sie folgen aus den Beziehungen der Kegelschnitte zur unendlich entfernten Geraden und den in ihr liegenden imaginären Kreispunkten und sind darum nur Specialisirungen der projectivischen Eigenschaften. Durch die projectivischen Eigenschaften wird die gleichförmige Bestimmung und Behandlung der Kegelschnitte in allen Projectionen und durch diese gesichert; Denn ebenso wie in §. 32, 33 gehen auch die übrigen projectivischen Eigenschaften der Kegelschnitte auf die projicirenden Kegel- und

Cylinderflächen über als auf die ihnen im Strahlen- und Ebenenbündel entsprechenden Gebilde. Jene entsprechen der Centralprojection der Kegelschnitte und der parallelprojectivischen Darstellung der Kegelflächen, diese der Parallelprojection der Kegelschnitte und der Cylinderflächen. Die Beziehungen der Collineation und Affinität sind daher für diese von größter Anwendbarkeit. Die Bestimmung aus Punkten und Tangenten ist aber nicht bloß projectivisch, sondern auch nach den Methoden der darstellenden Geometrie stets direct anwendbar, während Axen, Brennpunkte etc. der in den Constructionen so oft auftretenden Kegelschnitte sich oft gar nicht und zumeist nur durch weitläufige Hilfsbetrachtungen direct ermitteln lassen.

Aber wesentlicher als dies Alles ist es, daß durch das Vorige die Theorie der Grundgebilde erster Stufe vollständig gewonnen wurde, so daß ihre Anwendung überall da möglich ist, wo sie für die Theorie und Darstellung der zusammengesetzten Raumformen nützlich ist. Die graphische Behandlung der Kegelflächen zweiten Grades und ihrer Durchdringungen, die der Developpabeln, welche zwei Kegelschnitten gemeinschaftlich umgeschrieben sind, die ganze Theorie der Flächen zweiten Grades und ihrer Beziehungen zu einander bieten dafür unerschöpfliche Beispiele.

Endlich ist es für die Untersuchung der räumlichen Formen überhaupt von Wichtigkeit, daß die Symmetrieverhältnisse der ebenen Figuren¹⁾ als Specialfälle der involutorischen Beziehungen derselben hervorgingen, in einfachster Form den beiden Fällen entsprechend, wo in dem einen das Centrum unendlich entfernt (schiefe und rechtwinklige Axensymmetrie) und im andern die Axe unendlich entfernt ist (Congruenz und centrische Symmetrie). Die Kegelschnitte insbesondere besitzen dadurch eine so reiche Symmetrie und erwecken dadurch das Wohlgefallen des Beschauers, daß sie Involutionen gestalten sind und das Gesetz ihrer Formenverhältnisse in sich selbst haben; sie zeigen die specielle Form der centrischen Symmetrie für den Mittelpunkt und die Brennpunkte; die axiale Symmetrie für die Durchmesser und Directrixen, die Congruenz in Bezug auf ihre Axen.

¹⁾ Vergl. die treffliche Schrift: „Zeichnende Geometrie“ von Christ. Paulus. (Stuttgart 1866).

Und alle diese Zusammenhänge übertragen sich mit den Darstellungsmethoden selbst aus der Ebene und dem Strahlenbündel in den Raum.

63. Die vollständige Beherrschung der Untersuchung der centralprojectivischen Darstellung ebener Systeme durch die centrische Collineation läßt erwarten, daß auch die räumliche Beziehung, welche zu jener analog ist, die centrische Collineation räumlicher Systeme, von Bedeutung für die darstellende Geometrie sein werde.

Man erhält dieselbe, wenn man auf allen durch ein festes Centrum gehenden Ebenen hinsichtlich der in ihnen enthaltenen Theile des Original- und Bildsystemes für jenen Punkt als Centrum die Beziehung der centrischen Collineation so verwirklicht, daß im ganzen Raume jedem als dem Originalsystem angehörig betrachteten Punkte ein Punkt und jeder zu jenem gezählten Geraden eine Gerade im Bildsysteme, also einer Ebene im Originalsystem eine Ebene im Bildsystem und in alledem auch umgekehrt, entspricht; die entsprechenden geradlinigen Reihen, die entsprechenden ebenen Strahlenbüschel und die entsprechenden Ebenenbüschel sind perspectivisch.

Denkt man beide Systeme ohne die Specialitäten der centrischen Lage nur durch das Gesetz des eindeutigen Entsprechens bedingt, so erhält man die Beziehung von zwei Räumen auf einander, welche als die projectivische im Allgemeinen zu bezeichnen ist; das Gesetz der Gleichheit der Doppelverhältnisse der gleichgebildeten Gruppen von Elementen in den entsprechenden Gebilden erster Stufe besteht fort, nur die perspectivische Lage derselben ist aufgehoben.

In der centrischen Lage der collinear auf einander bezogenen Räume entspricht jede durch das Centrum gehende Gerade oder Ebene sich selbst, d. h. es liegen in ihr zwei vereinigte projectivische Punktreihen oder projectivische ebene Systeme, welche ihren einen Doppelpunkt, respective den Scheitel des entsprechend gemeinsamen Strahlenbüschels im Centrum und daher ihren andern Doppelpunkt respective die Gerade der entsprechend gemeinsamen Punktreihe reell und im Allgemeinen außerhalb des Centrums haben. Der Ort aller dieser Doppelemente ist eine Ebene, weil jeder durch das Centrum gehende Strahl mit ihm nur einen Punkt und jede durch dasselbe gehende Ebene einen Strahl gemein haben kann, aber immer auch einen gemein haben muß. Diese Ebene heißt die Collinea-

tionsebene der beiden Systeme. Die Paare entsprechender Punkte bestimmen mit dem Centrum und dem in der Collineationsebene liegenden Punkte ihrer Verbindungslinie ein constantes Doppelverhältniß, welches für alle durch das Centrum gehende Strahlen denselben Werth hat. Dasselbe constante Doppelverhältniß bestimmen auch die Paare entsprechender Ebenen — als welche sich in der Collineationsebene durchschneiden und von jedem das Centrum enthaltenden Strahl in entsprechenden Punkten geschnitten werden — mit der Collineationsebene und der durch ihre Schnittlinie nach dem Centrum gehenden Ebene. Alle Paare entsprechender Ebenen aus derselben in der Collineationsebene liegenden Geraden bilden eine Vereinigung von zwei projectivischen Ebenenbüscheln, denen die Collineationsebene und die Ebene durch das Centrum als Doppelsebenen entsprechen.

Da die unendlich entfernten Punkte des Raumes eine Ebene bilden, so entsprechen ihnen als dem einen oder andern Systeme angehörig gedacht im jedesmaligen andern Systeme wieder die Punkte einer Ebene; diese Ebenen enthalten die Systeme der beiden Gegenpunkte der projectivischen Doppelreihen in den durch das Centrum gehenden Strahlen und die Systeme der Gegenaxen der vereinigten projectivischen ebenen Systeme in den durch das Centrum gehenden Ebenen und sollen deshalb die Gegenebenen der Systeme heißen. Sie sind der Collineationsebene parallel, weil die gerade Durchschnittslinie einer Gegenebene mit der Collineationsebene eine Gerade sein muß, deren entsprechende mit ihr selbst zusammenfällt und zugleich unendlich entfernt ist. Auf jedem durch das Centrum gehenden Strahl ist die Mitte der zwischen den Gegenebenen liegenden Strecke zugleich die Mitte für die Strecke vom Centrum bis zur Collineationsebene oder die eine Gegenebene ist von der Collineationsebene ebenso weit entfernt wie die andere vom Centrum.

64. Die folgenden Sätze enthalten die vorigen Ergebnisse in anderer Form (vergl. §. 41).

Wenn die Ecken von zwei Tetraedern $a_1 a_2 a_3 a_4$, $a'_1 a'_2 a'_3 a'_4$ in Paaren a_1 , a'_1 etc. auf Geraden aus einem Centrum s liegen, so schneiden sich die Paare der entsprechenden Ebenen $a_1 a_2 a_3$, $a'_1 a'_2 a'_3$ etc. in vier Geraden X_4 , X_3 , X_2 , X_1 ,

Wenn die Flächen von zwei Tetraedern $A_1 A_2 A_3 A_4$, $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4$ sich in Paaren A_1 , A'_1 etc. in Geraden einer Ebene Σ schneiden, so liegen die Paare der entsprechenden Ecken $A_1 A_2 A_3$, $A'_1 A'_2 A'_3$ etc. in vier geraden Linien X_4 , X_3 , X_2 , X_1

die in einer Ebene Σ liegen und diese begegnet den Geraden $a_1a'_1$, etc. in vier Punkten $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, welche mit diesen und dem Centrum einerlei Doppelverhältniß bestimmen.

welche durch einen Punkt s gehen und dieser bestimmt mit den Schnittlinien der vier Ebenenpaare $A_1A'_1$, etc. vier Ebenen $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$, welche mit jenen und der Ebene Σ Büschel von einerlei Doppelverhältniß bilden.

Die sechs entsprechenden Kantenpaare der Tetraeder im ersten Falle schneiden sich in sechs Punkten, die als die Punkte 12, 13, 14, 23, 24, 34 — den Paaren $a_1a_2, a'_1a'_2$ etc. entsprechend — bezeichnet werden können und nach dem entsprechenden Satze des §. 41 als die Seitenschnittpunkte perspectivisch liegender Dreiecke zu Dreien in einer Geraden liegen müssen, nämlich 23, 24, 34 in X_1 ; 13, 14, 34 in X_2 ; 12, 14, 24 in X_3 ; 12, 13, 23 in X_4 . Die vier Geraden bilden daher die Seiten eines vollständigen Vierecks, von dem jene sechs Punkte die Ecken und die Schnittpunkte der Gegenseiten sind.

Bezeichnet man ebenso durch $(12)', (13)', (14)', (23)', (24)', (34)'$ die Schnittpunkte der Paare der Geraden $1'2, 12'; 1'3, 13'$ etc., wie sie durch Vertauschungen eines entsprechenden Paares von Tetraederecken erhalten werden, so erhält man noch vier andere Ebenen $\Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3, \Sigma^4$, deren jede wie die Ebene Σ die Eigenschaft hat, mit dem Punkt s zusammen jede der Strecken a_1, a'_1 etc. nach demselben Doppelverhältnisse zu theilen.

Das Doppelverhältniß, welches hiernach wie nach dem vorigen Paragraphe für alle Paare der entsprechenden Punkte auf den durch das Centrum gehenden Strahlen, sowie für alle Paare der entsprechenden Ebenen durch die in der Collineationsebene liegenden Geraden gilt, nicht minder auch für alle die centrischen Collineationen ebener Systeme, welche die entsprechenden Ebenen der räumlichen Systeme enthalten, darf als das charakteristische Doppelverhältniß der Centralcollineation bezeichnet werden. Durch seinen Werth, das Centrum s und die Collineationsebene Σ ist eine solche Collineation vollkommen bestimmt; Centrum, Collineationsebene und ein Paar entsprechender Punkte, Strahlen oder Ebenen bestimmen die Collineation, weil sie jenes Doppelverhältniß bestimmen. Jede der Gegenebenen U_1, R gibt ein Paar entsprechender Ebenen, weil ihr die unendlich ferne Ebene des andern Systems entspricht. Sie theilen die auf den Collineationsstrahlen durch das Centrum und die Collineationsebene begrenzten Segmente nach dem einfachen

Verhältnisse, welches dem charakteristischen Doppelverhältnisse gleichwerthig ist (vergl. §. 40).

Man erhält zu einer Geraden G_1 des Bildsystems (Fig. 61) die entsprechende Gerade G des Originalsystems, indem man durch den Schnittpunkt σ von G_1 mit der Collineationsebene eine Parallele zieht zu der Geraden, welche das Centrum s mit dem Schnittpunkt der Geraden G_1 in der Gegenebene U_1 verbindet und man findet zu der Geraden H des Originalsystems die entsprechende Gerade H_1 des Bildsystems als eine aus dem Schnittpunkt von H mit der Collineationsebene gezogene Parallele zu der von s nach dem Schnittpunkte von H mit der Gegenebene R gehenden Geraden. Zu einem Punkte a_1 oder b in G_1 oder H erhält man den entsprechenden a oder b_1 als Durchschnitt des nach ihm gehenden Strahls aus dem Centrum mit G oder H_1 respective; und man erhält zu einer durch G_1 oder H gehenden Ebene E_1 oder F die entsprechende Ebene E oder F_1 als bestimmt durch die Schnittlinie derselben mit der Collineationsebene und die Linie G oder H_1 respective. Die entsprechenden zu den Geraden oder Ebenen, welche der Collineationsebene parallel sind, bestimmen sich durch einen ihrer Punkte, da sie selbst der Collineationsebene und der gegebenen respective parallel sind. Das charakteristische Doppelverhältniß wird für sie zu dem Verjüngungsverhältnisse der Ähnlichkeit, in welcher das Original- und das Bildsystem zu einander stehen.

65. Die Construction des centralcollinearen räumlichen Systems zu einem gegebenen räumlichen System läßt sich stets auf die eines centralcollinearen ebenen Systems zurückführen. Wir denken eine durch das Collineationscentrum gehende Ebene, eine Schaar von Parallelen $P_1, P_2 \dots$ zu einer festen in der Collineationsebene liegenden Geraden durch die Punkte $a_1, a_2 \dots$ des gegebenen räumlichen Systems und das System ihrer Schnittpunkte $b_1, b_2 \dots$ mit jener Ebene; bilden wir dann zu dem letztern das centralcollineare System $b'_1, b'_2 \dots$ in derselben Ebene für das Centrum als Centrum, die Schnittlinie mit der Collineationsebene als Collineationsaxe und die Schnittlinien mit den Gegenebenen als Gegenaxen, so liegen die den $a_1, a_2 \dots$ entsprechenden Punkte $a'_1, a'_2 \dots$ des entsprechenden räumlichen Systems gleichzeitig in den Parallelen zu den Geraden P durch die Punkte $b'_1, b'_2 \dots$ und in den respectiven Strahlen aus dem

Centrum nach den entsprechenden Punkten des Originalsystems $a_1, a_2 \dots$

In dem Falle (Fig. 62), wo das Originalsystem z. B. das System $abcdefgh$ durch seine orthogonale Parallelprojection auf eine zur Collineationsebene normale Ebene und die auf diese letztere selbst oder (wie in der Figur) eine zu beiden normale Ebene bestimmt ist, denkt man die Schaar der zur ersten Projectionsebene normalen Geraden als die der Parallelen der vorigen Methode und hat dann das centralcollineare System $a_1b_1c_1 \dots$ für das System der Projectionen auf jene mit der entsprechenden Projection des Centrum als Centrum und den gleichnamigen Spuren der Collineationsebene und der Gegenebenen als Collineationsaxe und als Gegenaxen zu construiren, um in ihm die gleichnamige Projection des centralcollinearen Systems zu erhalten. Dadurch stellt sich in diesem Falle die angegebene Methode als völlig gleich einfach zu derjenigen, die das System der Schnitte einer Parallelenschaar aus den Punkten des Originalsystems in der Collineationsebene benutzt, welches sich selbst entspricht und mittelst des Durchschnittspunktes des gleichgerichteten Strahls aus dem Centrum mit der zugehörigen Gegenebene als dem gemeinsamen Schnittpunkt die ihnen entsprechenden Geraden diese und auf den zugehörigen Collineationsstrahlen die entsprechenden Punkte bestimmt.

Wenn die Gegenebene im Bildsystem auf der dem Centrum entgegengesetzten Seite der Collineationsebene liegt, so wird der ganze auf derselben Seite liegende unendliche Raum zwischen der Collineationsebene und jener Gegenebene so abgebildet, daß die vom Centrum entfernteren Punkte des Originalsystems den vom Centrum entfernteren Punkten des Bildsystems entsprechen. Im umgekehrten Falle wo die Gegenebene des Bildsystems zwischen dem Centrum und der Collineationsebene liegt, findet das Entsprechen in der umgekehrten Weise statt, daß den vom Centrum entfernteren Punkten des Originalsystems die demselben näheren Punkte des Bildsystems entsprechen und umgekehrt. Jenes entspricht, dies widerspricht den Bedingungen des Sehprozesses. Da aber alle entsprechenden Ebenenpaare der collinearen Systeme in der Beziehung der centrischen Collineation oder der Centralprojection stehen, so folgt daß im ersteren Falle unter denselben Bedingungen, unter denen die Centralcollineation in der Ebene Darstellungen liefert, die den Character der Bildlichkeit besitzen, auch die Central-

collineation im Raume für ein im Centrum befindliches Auge bildliche d. i. Täuschung ermöglichende Darstellungen geben wird. Jene Bedingungen entspringen bekanntlich aus der Begrenzung des ruhenden Sehfeldes, die es nöthig macht, daß die angeschauten Systeme innerhalb des vom Mantel des sogenannten Sehkegels umschlossenen Raumes liegen — abgesehen von der nothwendigen Entfernung aller ihrer Theile vom Auge, die die deutliche Sehweite bezeichnet. Sind sie erfüllt, so repräsentirt die Raumfigur des Bildsystems mit verringerter Tiefe für ein im Centrum befindliches Auge die entsprechende Raumfigur des Originalsystems täuschend. Darum fordert die Darstellung der Reliefs in der Sculptur die Anwendung dieser Constructionsmethode; sie ist aber auch die Grundlage aller decorativen Kunst und gibt daher die Hauptgrundlage der scenischen oder theatralischen Decoration und kann auch in der Architektur, der höhern Gartenkunst etc. mannigfache Anwendungen finden.

66. Wenn das charakteristische Doppelverhältniß der räumlichen Centralcollineation den besonderen Werth — 1 hat (Fig. 63), so daß entsprechende Punktpaare eines Strahles aus dem Centrum mit den Doppelpunkten desselben, die entsprechenden Strahlenpaare aus einem Punkte der Collineationsebene mit den Doppelstrahlen ihrer Ebene und die entsprechenden Ebenenpaare aus einer Geraden in der Collineationsebene mit den zugehörigen Doppelebenen je ein harmonisches System und die sämtlichen Paare entsprechender Punkte eines Strahles aus dem Centrum, entsprechender Strahlen oder Ebenen aus einem Punkte oder einer Geraden in der Collineationsebene eine Involution respective von Punkten, Strahlen oder Ebenen bilden, so ist das Entsprechen der Elemente beider collinearen Systeme ein vertauschungsfähiges und man darf die Collineation als eine harmonische oder involutorische bezeichnen. Die Gegenebenen sind dann in der Mitte zwischen dem Centrum und der Collineationsebene vereinigt, die Parallelen durch das Centrum zu den Paaren entsprechender Strahlen oder Ebenen bilden mit diesen respective Parallelogramme oder parallelepipedische Mäntel, deren zwei neue Ecken oder Kanten dieser Ebene angehören. Die involutorische Centralcollineation kann nach dieser Lage ihrer Bestimmungselemente dem engeren Zwecke der darstellenden Geometrie nicht genügen, der in der Construction

bildlicher Systeme besteht. Dieß schmälert ihre Bedeutung für die Erkenntniß der Gesetzmässigkeit der Raumformen nicht. Sie würde schon im Zusammenhange einer Entwicklung hervortreten, welche die im Früheren nicht betrachteten Erzeugnisse projectivischer Gebilde und etwa die Collinearverwandten (§. 21) der Kugel zu untersuchen vornähme und daher in dem Ausbau der darstellenden Geometrie für das constructive Studium der doppeltgekrümmten Curven und der Oberflächen ihren Platz finden müsste. Ihre volle Bedeutung kann sie immerhin erst in einer von den Beschränkungen der Darstellbarkeit abstrahirenden rein wissenschaftlichen Entwicklung der Geometrie der Lage erhalten. Doch wird auch für diese selbst die besondere Berücksichtigung des Darstellbaren und der Darstellung als vortheilhaft anerkannt werden können.

Für die Elemente ist es von besonderer Bedeutung, daß die Symmetrieverhältnisse der räumlichen Figuren ebenso wie (§. 62) die der ebenen sich als Specialfälle ihrer Involution ergeben, und daß die Involutionsgestalten unter ihnen die allgemeinste und reichste Symmetrie zeigen, eben jene Flächen zweiter Ordnung und Classe und gewisse aus ihnen ableitbare Formen, zu welchen die Entwicklung auch innerhalb des Rahmens der darstellenden Geometrie führt. Die beiden Fälle der Symmetrie, nämlich in Bezug auf ein Centrum oder in Bezug auf eine Ebene, so wie ihre durch besondere Voraussetzungen hervorgehenden speciellen Formen, ergeben sich daraus mit Leichtigkeit.

67. Für ein in unendlicher Entfernung gedachtes Collineationscentrum liegen die Paare entsprechender Punkte beider Systeme auf parallelen Geraden so, daß die von ihnen mit den respectiven Schnittpunkten in der Collineationsebene bestimmten Segmente verhältnissgleich sind. Dann entsprechen den unendlich fernen Elementen des einen Systems die des andern, parallelen Geraden und Ebenen entsprechen parallele Gerade und Ebenen — es ist die Affinität räumlicher Systeme. Für den Fall, daß die Richtung des Centrum zur Collineationsebene normal und das vorerwähnte constante Verhältniß der Einheit gleich ist, erhält man die Beziehung der orthogonalen Symmetrie in Bezug auf diese Ebene.

Ist die Collineationsebene unendlich entfernt, so liegen die Paare entsprechender Punkte auf den aus dem Centrum gezogenen

Strahlen so, daß sie mit diesem Segmente von constantem Verhältnisse bestimmen; entsprechende Gerade und ebenso entsprechende Ebenen sind einander parallel und die in ihnen liegenden entsprechenden Systeme stehen zu einander in der Beziehung der Ähnlichkeit nach diesem Verhältnisse der Verjüngung. Man bezeichnet daher diese Specialform der centralen Collineation räumlicher Systeme als Ähnlichkeit in ähnlicher Lage und hat zu unterscheiden, ob das Centrum der äußere oder der innere Ähnlichkeitspunkt der Systeme ist. Ist das Verjüngungsverhältniß der Einheit gleich, so entsteht im erstern Falle die Deckung der congruenten Systeme, im letztern ihre einfachste centrische Symmetrie.

Liegen Centrum und Collineationsebene zugleich unendlich entfernt, so entsteht die einfache Congruenz der Systeme als Specialfall der räumlichen Centralcollineation.

Jeder der vorher besprochenen Beziehungen entspricht eine Methode der Modellirung d. i. der räumlichen Nach- oder Abbildung räumlicher Systeme. Die allgemeinste unter ihnen, die centrische Collineation, vermag zugleich auf das Vollständigste den Bedürfnissen der Kunst zu entsprechen; von den besonderen Fällen wird die Ähnlichkeit fast ausschließlich zur räumlichen Nachbildung benutzt, weil sie durch die allgemeine Geltung des einen Verjüngungsverhältnisses und die Unveränderlichkeit aller Winkelgrößen die größte Bequemlichkeit darbietet, so lange es sich um die Darstellung begrenzter Raumformen handelt.

68. Wenn man die Collineationsebene mit den Gegenebenen zusammenfallend denkt, so führen die Constructionen von §. 64, 65 auf die Bestimmungsweisen der Centralprojection für die gerade Linie, die Ebene und den Punkt zurück, die in §. 6 und 10 entwickelt sind. Die in den Richtungen der durch das Centrum gehenden Strahlen unendliche Tiefe des Originalraumes wird auf Null in dem Schnittpunkt des Strahles mit der Collineations- und Gegenebene zusammengedrängt. Man nennt diese nun die Bildebene, weil die Nachbildung des Gesamttraumes auf das ebene in ihr gelegene System reducirt wird.

Ist in demselben Falle auch das Centrum unendlich entfernt, so entsteht die schräge oder die orthogonale Parallelprojection, je nach dem die Richtung des Centrums schräg oder normal zur Bildebene ist. Denken wir eine Gerade P in der Richtung des Centrums, so liegen die entsprechenden Punkte zu beliebigen Punkten des Raumes

in den Schnittpunkten der durch die Letzteren gehenden Parallelen zu P , d. i. ihrer projecirenden Geraden, mit der Bildebene; die Bilder aller Punkte einer Geraden dieser Parallelenschaar fallen in ihren Durchschnittspunkt mit der Bildebene zusammen. Das Bild einer Geraden G wird gefunden als die Schnittlinie der durch sie parallel zu P gehenden d. i. ihrer projecirenden Ebene mit der Bildebene und fällt daher mit den Bildern aller andern in dieser projecirenden Ebene liegenden Geraden zusammen. Zur Unterscheidung dieser Geraden von einander bietet sich nur die Betrachtung ihrer Schnittpunkte mit der Bildebene dar und es lassen sich daher die Strahlen eines Büschels, dessen Scheitel der Bildebene angehört und dessen Ebene mit einer projecirenden Ebene zusammenfällt, durch ihre Bilder nicht von einander unterscheiden. Die Bilder ihrer Richtungen fallen unterschiedlos in dem unendlich fernen Punkte ihres gemeinschaftlichen Bildes zusammen. Die Bestimmung einer geraden Linie und darum auch die eines Punktes und einer Ebene ist somit nicht durch eine einzige Parallelprojection möglich; durch Parallelprojection kann daher der Zweck der darstellenden Geometrie, die Bestimmung räumlicher Formen, nicht anders erreicht werden, als dadurch, daß man mehrere Parallelprojectionen derselben mit einander combinirt, die übrigens auf derselben Ebene oder auf verschiedenen Ebenen erzeugt werden können.

69. Die Beschränkung auf die orthogonale Parallelprojection zwingt zur Benützung von zwei verschiedenen am einfachsten zu einander normalen Bildebenen wie sie die Grundlage der „Géométrie descriptive“ des Monge bilden, d. h. sie führt zur Beziehung der Raumformen auf drei zu einander rechtwinkelige Coordinatenebenen. Die Benützung der drei zu einander rechtwinkeligen Projectionsebenen für die Entwicklung der Elemente führt sofort zur Erkenntniß der Existenz und der wichtigen Beziehungen derjenigen sechs Ebenen, welche paarweis durch die Schnittlinie von zwei Projectionsebenen unter gleicher Neigung (45°) gegen beide gelegt werden und sich zu je dreien in vier Geraden schneiden, welche aus dem Anfangspunkt des Projectionssystems unter gleicher Neigung gegen seine Axen gezogen werden können; jene Ebenen bilden den Ort aller der Punkte und Geraden, von deren Projectionen immer ein Paar gleichen Abstand oder gleiche Neigung zur zwischen liegenden Projectionssaxe respective besitzen; diese Geraden bilden den

Ort aller der Punkte, deren Coordinaten oder projecirende Linien gleichlang sind. Unter jenen sechs Ebenen haben zwei — welche von ihnen, das hängt von der Art ab, in welcher die drei Projectionsebenen in eine Zeichenebene vereinigt werden — die Eigenschaft, daß ein Paar von den Projectionen der in ihnen gelegenen Punkte oder Geraden zusammen fallen, und von jenen vier Geraden besitzt eine drei zusammenfallende Projectionen. Wenn man dann zur Untersuchung der Darstellung ebener Systeme vorschreitet, so erkennt man, daß jede Ebene mit den vier erwähnten Geraden und den sechs Ebenen vier Punkte und sechs Gerade gemein hat, von denen die Letzteren sich zu drei in jenen Punkten schneiden, während die Schnittpunkte der Ebene mit den drei Projectionssachsen die Schnittpunkte der Gegenpaare des von jenen sechs Geraden gebildeten vollständigen Vierseits sind, und man findet ferner, daß in jeder Ebene zwei Gerade liegen, nämlich ihre Durchschnittslinien mit den vorerwähnten zweien unter den sechs festen Ebenen, welche je zwei sich deckende Projectionen haben: die Affinitätsachsen für die von je zwei respective benachbarten Projectionen des ebenen Systems gebildeten affinen Systeme. Nach dem Vorigen ist gewiß, daß dieselben sich zu mannigfacher constructiver Benützung vortheilhaft darbieten müssen ¹⁾).

Ähnlich wie in den §§. 15 f wird das System der Hilfsmittel der orthogonalen Parallelprojection zur Überwindung aller practischen der Technik des Zeichnens entspringenden Schwierigkeiten durch die Transformation der Objecte oder des Projectionssystems vervollständigt; die axonometrischen Darstellungsmethoden sind einfache aber besonders nützliche Ergebnisse dieser Entwicklung. Einen analogen Entwicklungsgang kann man für die Untersuchung der schrägen Parallelprojectionen einschlagen.

70. Die Existenz der Affinitätsaxe der beiden Projectionen eines ebenen Systems ist ein specieller Fall des allgemeinen Satzes: Wenn zwei ebene Systeme mit einem dritten ebenen System

¹⁾ Vergl. die Noten des Verfassers in der „Zeitschrift für Mathematik und Physik“ von Schlömilch, Bd. 5 u. 6, p. 56 u. 76, welche ohne Kenntniß der anderweitigen Entdeckung derselben gegeben wurden. Auch K. Pohlke in seiner empfehlenswerthen Schrift „Darstellende Geometrie“ I. Abthl. 1859 (2. Aufl. 1866), hat die Affinitätsachsen benützt.

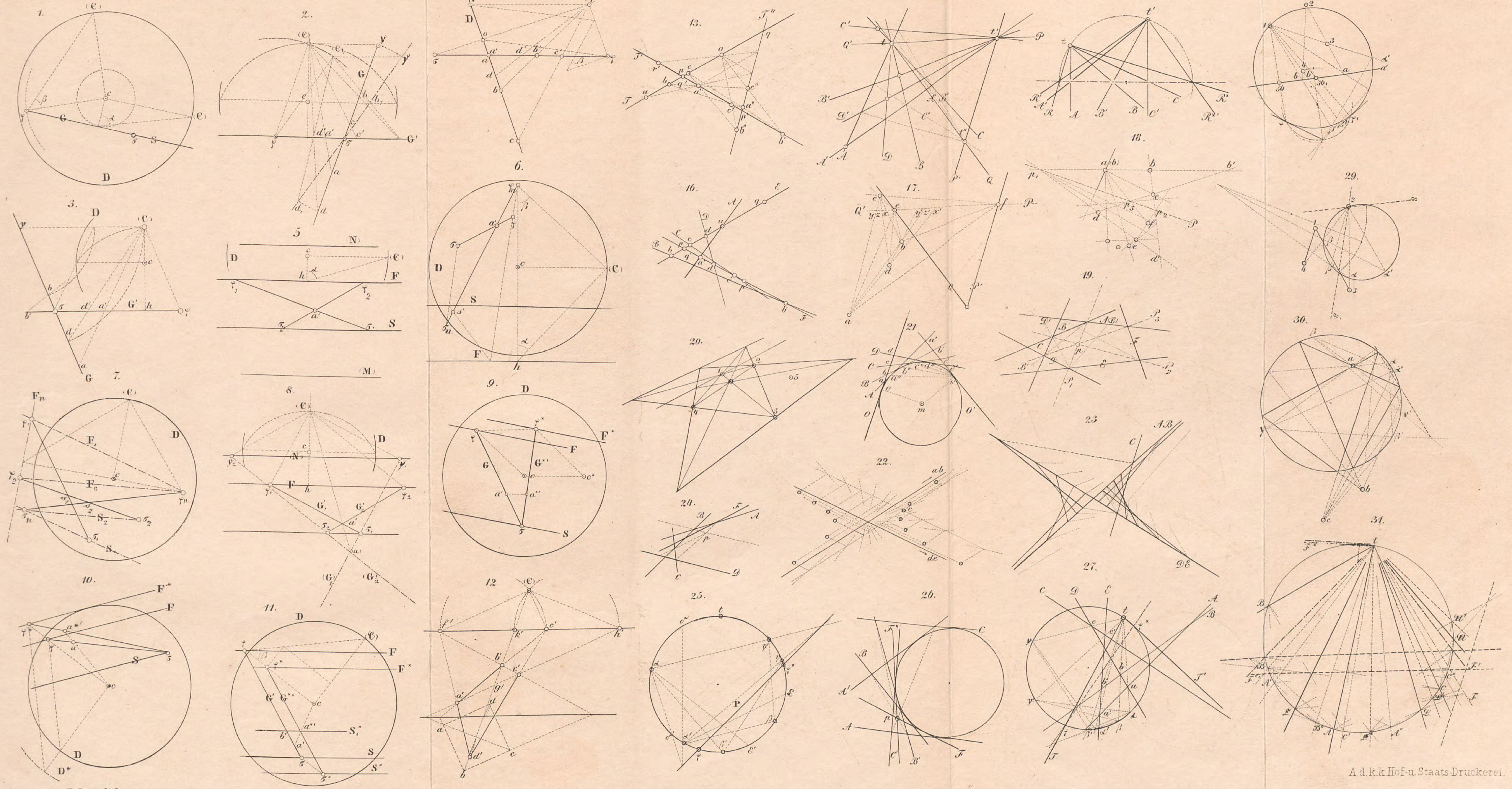
centrisch-collinear sind, so sind sie auch untereinander centrisch-collinear, wenn die beiden gegebenen Collineationen eine und dieselbe Gerade zur Axe oder einen und denselben Punkt zum Centrum haben; im ersten Falle sind die Centra der drei Collineationen in einer Geraden, im zweiten Falle gehen die Axen der drei Collineationen durch einen Punkt. Die Affinitätsaxe zwischen Aufriß und Grundriß des ebenen Systems geht mit den beiden zugehörigen Spuren desselben durch einen Punkt und diese letzteren sind die Axen der respectiven Affinitäten, welche zwischen der Originalfigur und ihrem Grund- und Aufriß bestehen. Der ebene Schnitt einer Kegelfläche in der Methode der Centralprojection und die Ableitung seiner wahren GröÙe gibt ein nützliches Beispiel und zugleich den Beweis des ersten Satzes, dem der zweite nach dem Princip der Dualität entspricht. (Fig. 64) gibt die Darstellung davon für den Kegel zweiten Grades von der kreisförmigen Spur S_k und der Spitze s' in der Erzeugenden σf , die Schnittebene von der Spur S und Fluchtlinie F und den Distanzkreis D . Die Benützung eines Systems von Hilfsebenen, welche eine zur Bildebene parallele Gerade G durch die Spitze enthalten, führt zu der Erkenntniß, daß das Bild der Schnittcurve die Collinearverwandte der Spurcurve für das Centrum s' , die Collineationsaxe S und die Durchschnittslinie R' der Schnittebene mit der die Spitze des Kegels enthaltenden Parallelebene zur Bildebene als Gegenaxe ist. Aus der Umlegung der Schnittebene folgt dann, daß die wahre Gestalt der Schnittcurve der Spurcurve collinearverwandt ist für die Umlegung (s) der Spitze des Kegels mit der Parallelebene zur Schnittebene als Centrum, für S als Collineationsaxe und die Spur jener Parallelebene in der Bildebene als die der Schnittcurve zugehörige Gegenaxe (U). Sie ist zugleich dem Bilde der Schnittcurve collinearverwandt für die Umlegung (C) des Projectionscentrums mit der Parallelebene zur Schnittebene als Centrum und dieselbe Axe S , wie es der Satz angibt. Fig. 64 zeigt den collinearen Zusammenhang der drei Curven vollständig; insbesondere sind die zur Bildebene parallelen Tangenten der Schnittcurve sammt ihren Berührungspunkten b, d dargestellt; mittelst der Gegenaxen U' und (U) ist auch sowohl für das Bild (in h', k') als für die wahre Gestalt der Schnittcurve [in (e), (f)] ein zweites Paar paralleler Tangenten ermittelt, so daß in beiden ein umgeschriebenes Paral-

lelogramm und damit ein Paar von conjugirten Durchmessern gefunden sind; $t'v'$, $u'w'$ in der Projection und $(n)(p)$, $(o)(q)$ in der wahren Gestalt.

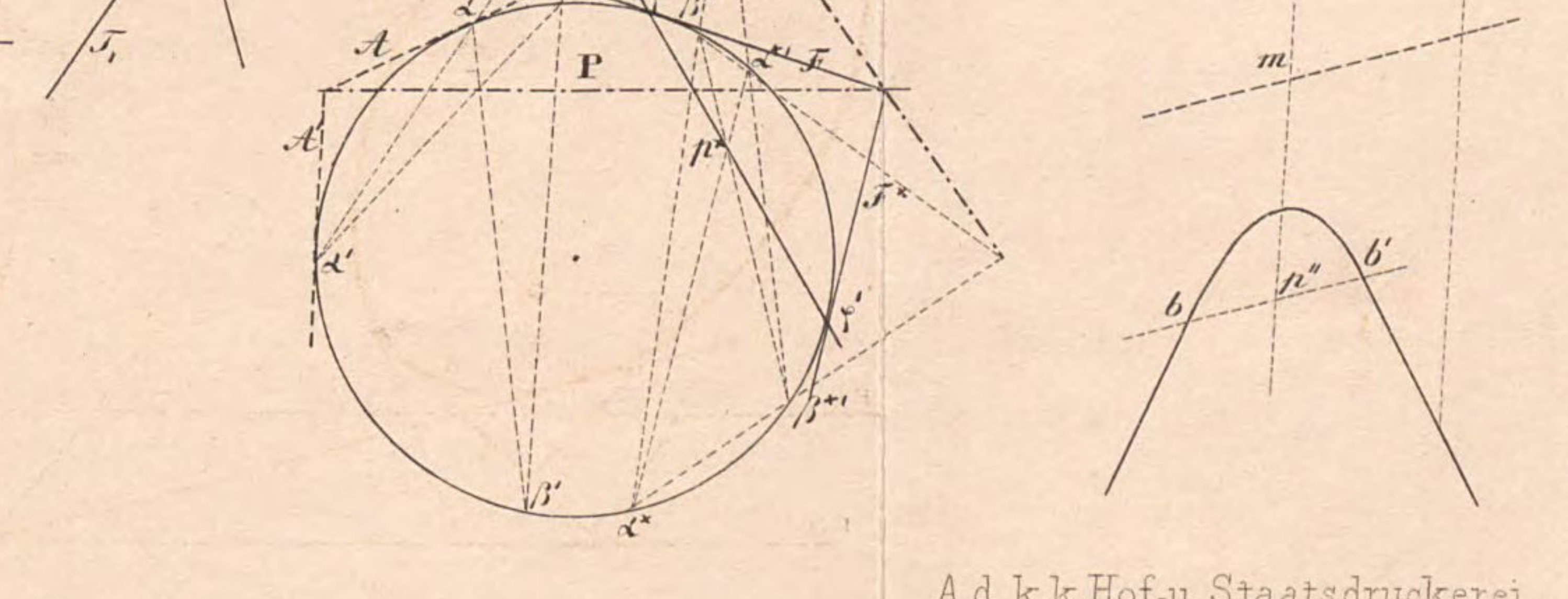
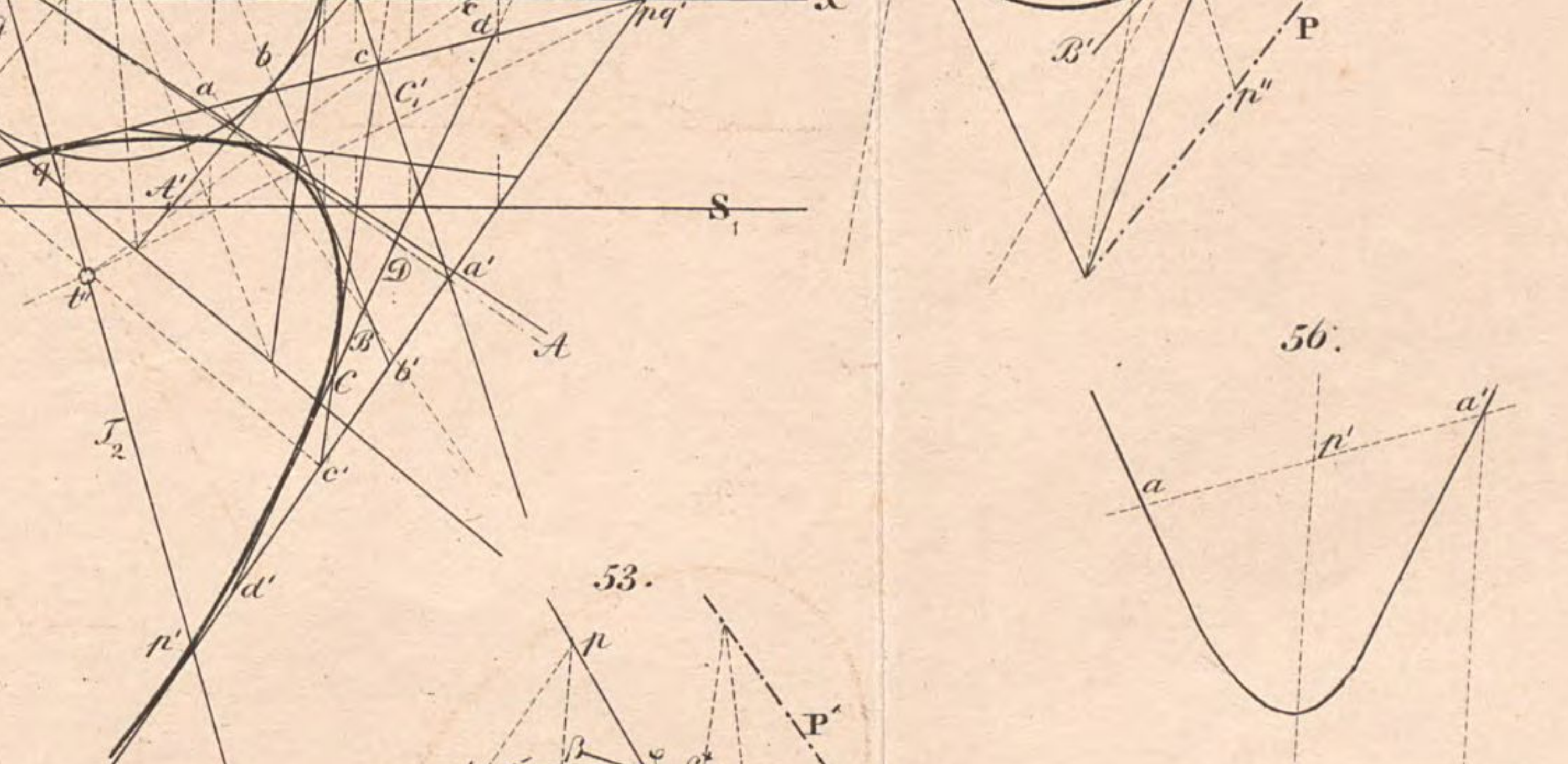
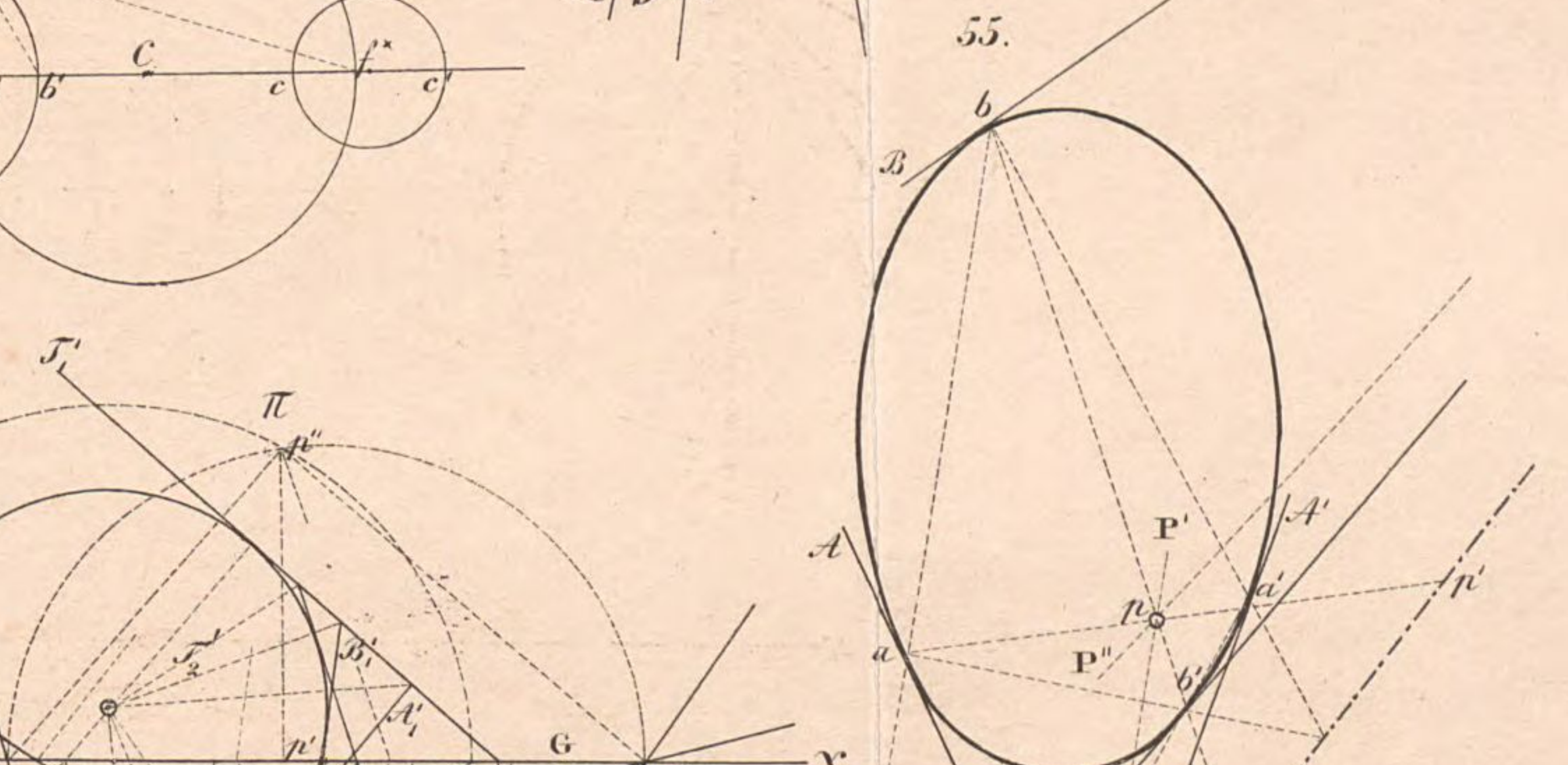
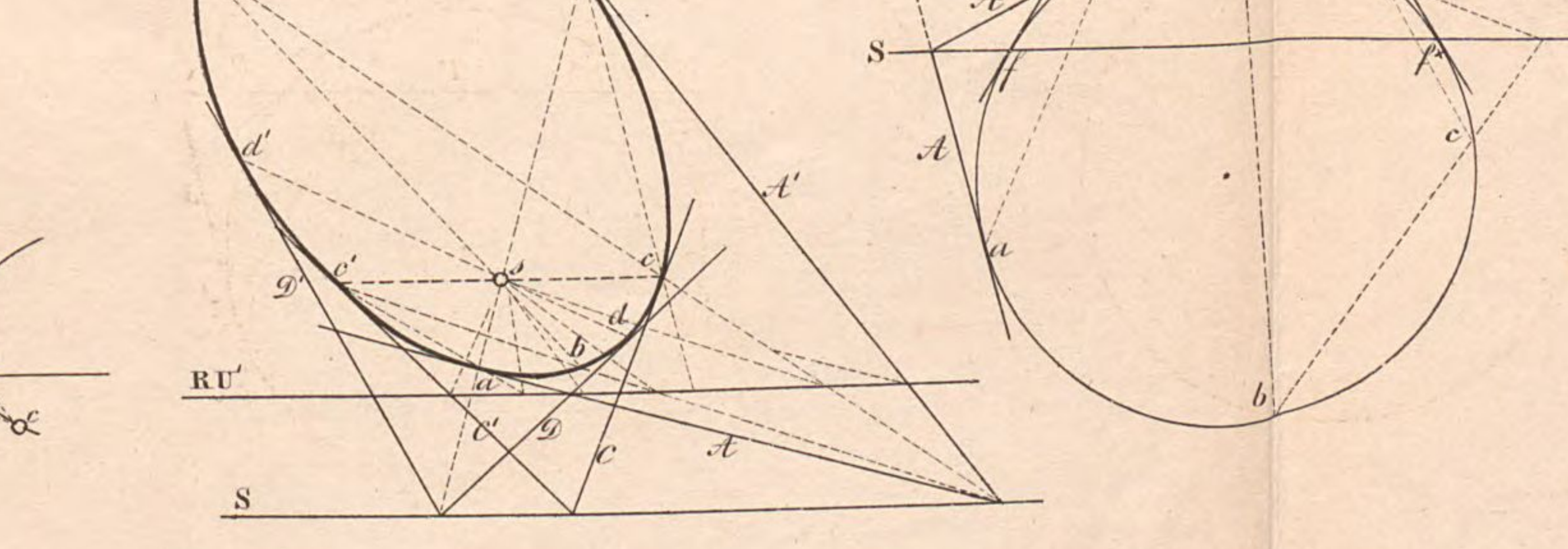
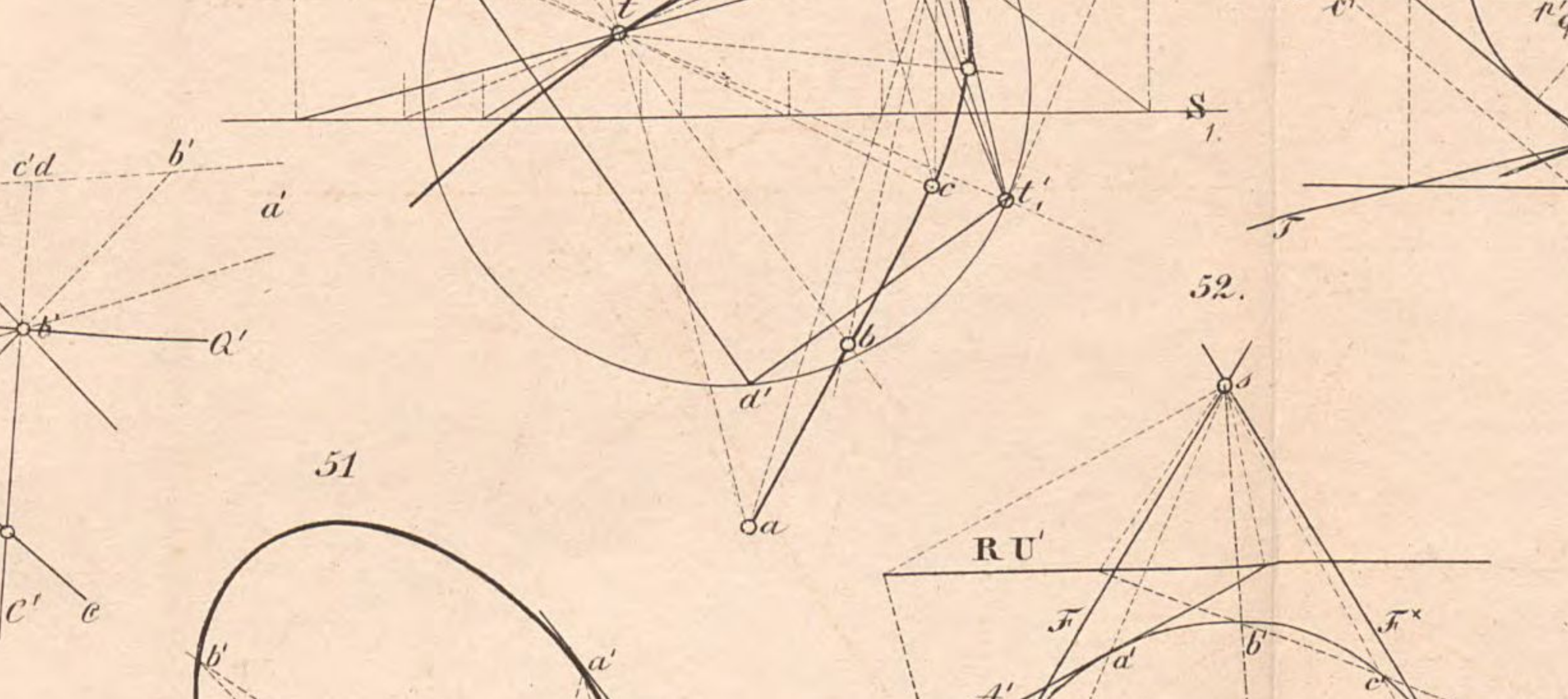
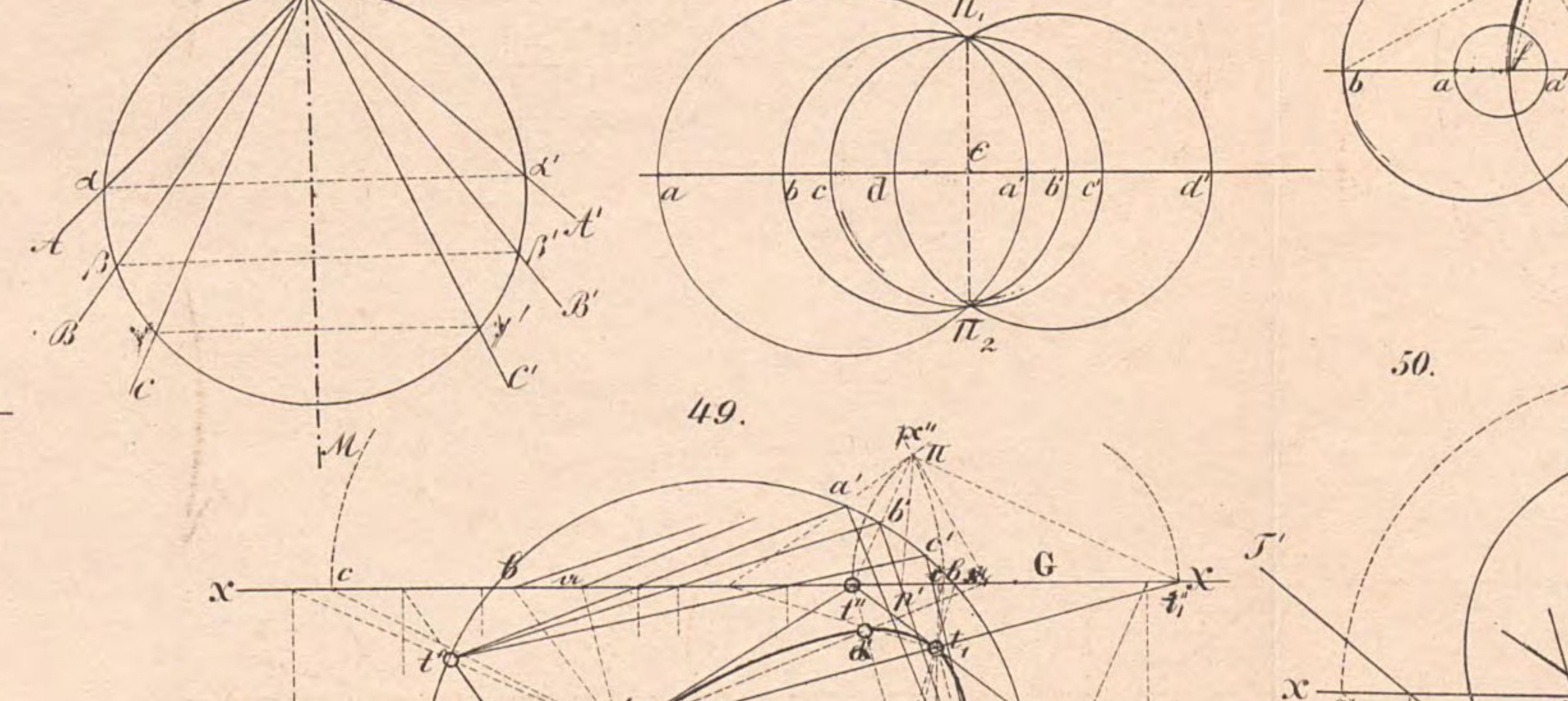
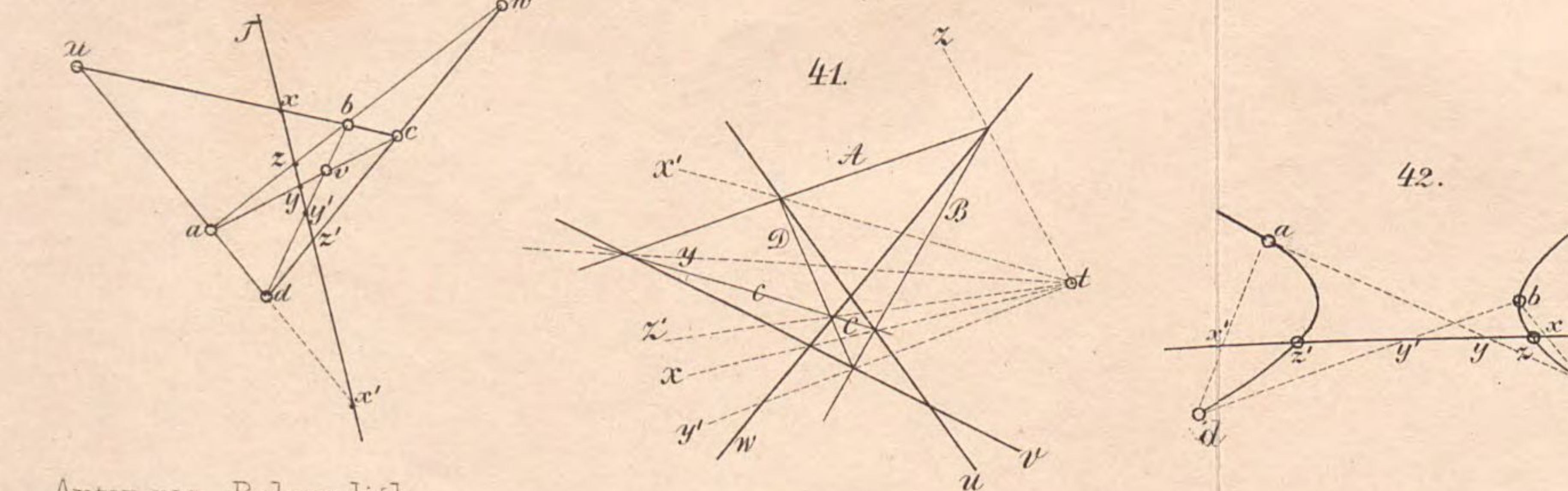
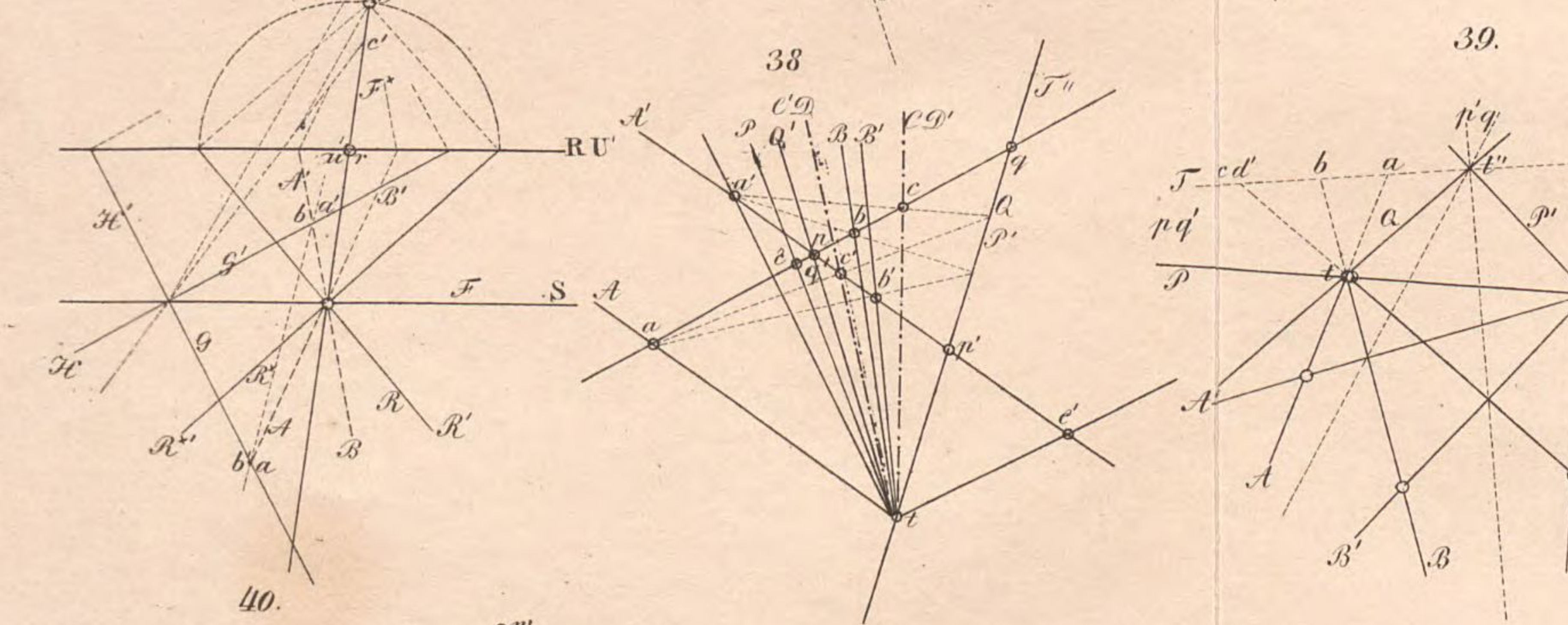
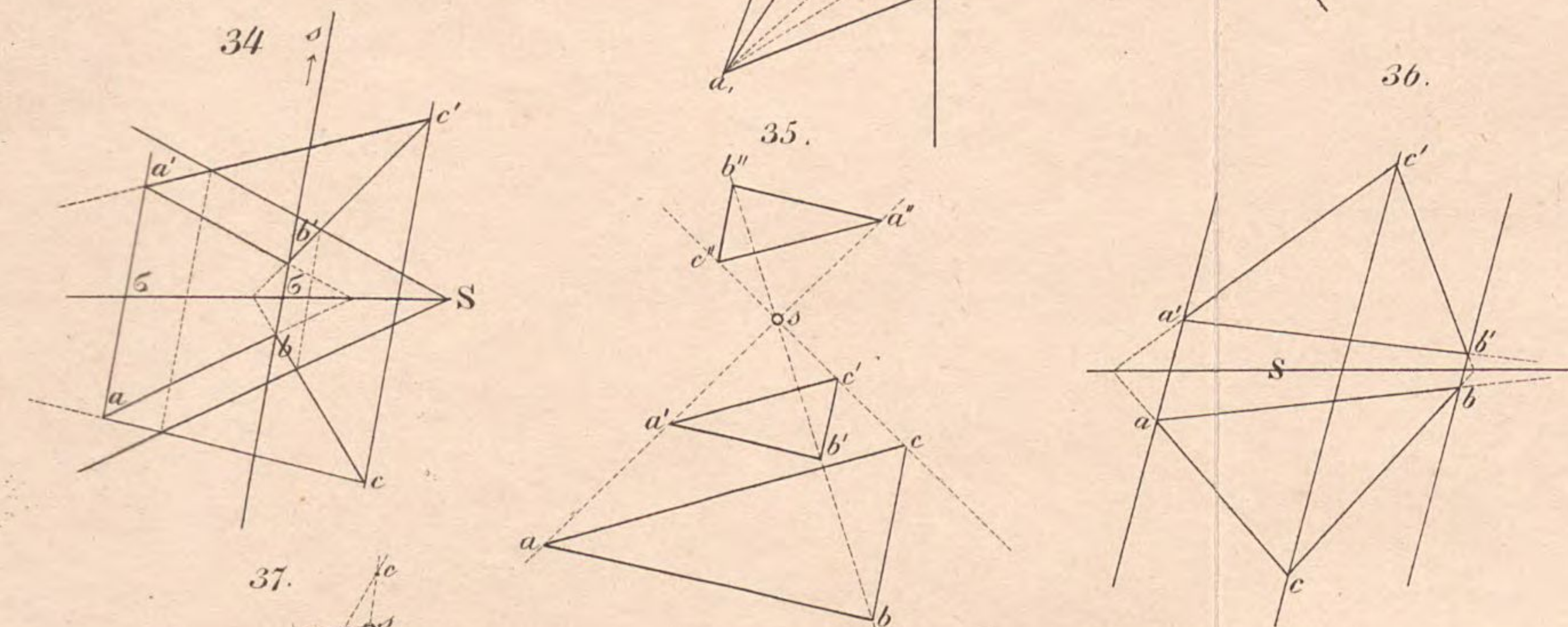
71. Wie sich an die Existenz der Affinitätsaxen der Parallelprojection die Entwicklung von Elementen der Geometrie der Lage anknüpfen läßt, hat in einer ausgedehnten Abhandlung J. B. Brasseur zu zeigen gesucht: (Acad. des sciences etc. Bruxelles. 1853) „Mémoire sur une nouvelle méthode d'application de la géométrie descriptive à la recherche des propriétés de l'étendue.“ (4^o. 148 p. 3 Tafeln). Die Regelflächen zweiten Grades und besondere Formen ihrer graphischen Bestimmung spielen darin eine wichtige Vermittlerrolle. Die Sätze von Pascal und Brianchon und daran sich anschließende Kegelschnitts-Constructionen hat schon früher mit Hilfe der Centralprojection der Regelflächen zweiten Grades dargestellt B. E. Cousinery in seinem Buche: „Le Calcul par le Trait“. (1839, p. 127 f.). Die Verbindung mit den Elementen der Centralprojection erscheint natürlicher und erweist sich umfassender und bequemer. Es ist dabei von entscheidendem Gewicht, daß man die durch sie und die Theorie der Kegelschnitte gewonnenen Lehren der Geometrie der Lage zur Behandlung der Flächen zweiten Grades und aller der von ihnen abhängigen Formen verwenden kann, statt jene Lehren selbst erst aus der Theorie der Flächen zweiten Grades zu gewinnen, und sich für diese also mit weniger vollkommenen und kräftigen Hilfsmitteln begnügen zu müssen. Auch die Einschaltung eines Kapitels über die „Transformation homologique“, durch welche de la Gournerie in seinem „Traité de Géométrie descriptive“ der Wichtigkeit dieser Hilfsmittel gerecht zu werden versucht hat, erreicht den Zweck nicht. Andererseits entspricht in der Literatur der Geometrie der Lage auch das Werk von Weißenborn „Die Projection in der Ebene“ (Berlin 1862) dem hier verfolgten Zwecke nicht, weil für denselben die Vereinigung der Geometrie des Raumes mit der der Ebene entscheidend ist. Den grundlegenden Werken von Steiner und von Staudt fehlt dazu die Absicht der Beschränkung; das Streben nach voller wissenschaftlicher Allgemeinheit äußert sich bei dem Werke des letzteren Meisters geradezu auch in der gänzlichen Beseitigung des graphischen Elementes.

Auf dem hier betretenen Wege kann man die Methoden der Geometrie der Lage im ganzen Umfange fruchtbar machen für die wissenschaftliche Entwicklung der darstellenden Geometrie; daß er der allein brauchbare sei, soll nicht behauptet werden, ob man weiter gehen will und muß als die hier gegebenen Grundzüge thun, oder ob man sich mehr beschränken kann, das hängt von besonderen Verhältnissen ab und kann nur durch den Ausbau des ganzen Systems in dieser Richtung definitiv entschieden werden. Die Entscheidung der Hauptfrage selbst, über die Verbindung der Geometrie der Lage mit der darstellenden Geometrie¹⁾ zur Förderung und Hebung der Letzteren, ist aber für große Gebiete des höheren wissenschaftlichen Unterrichtes von Wichtigkeit und kann nicht mehr allzulange verschoben werden.

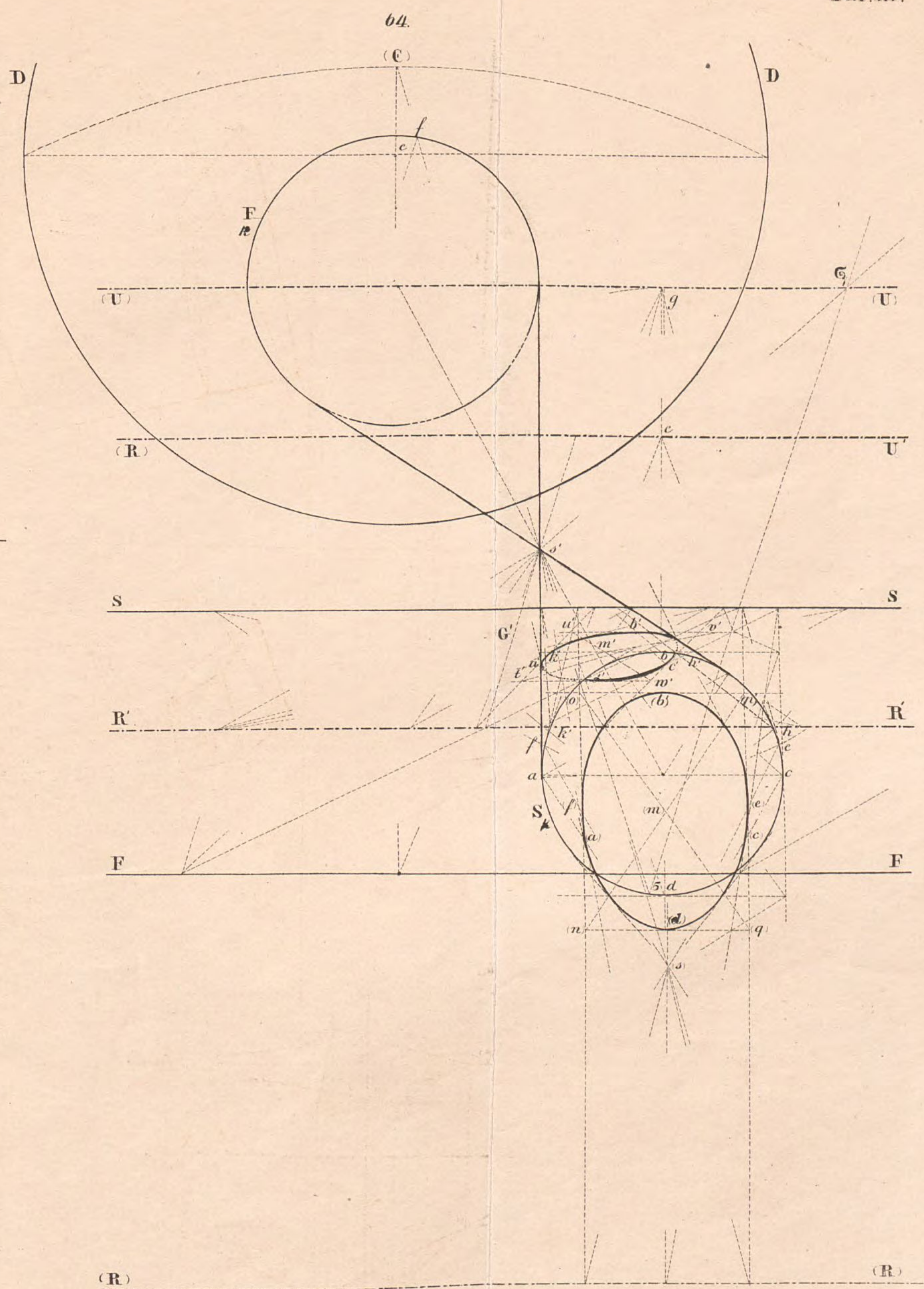
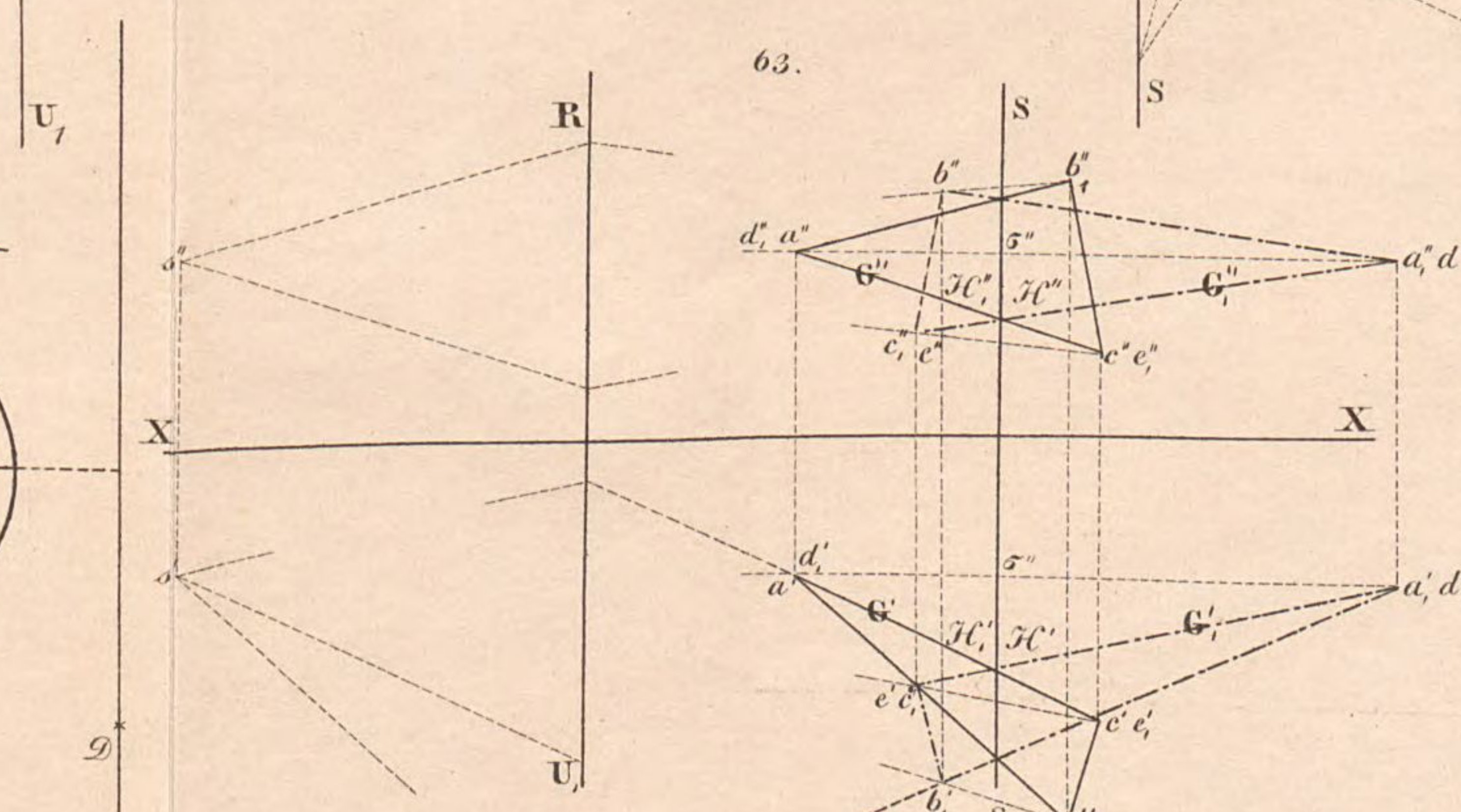
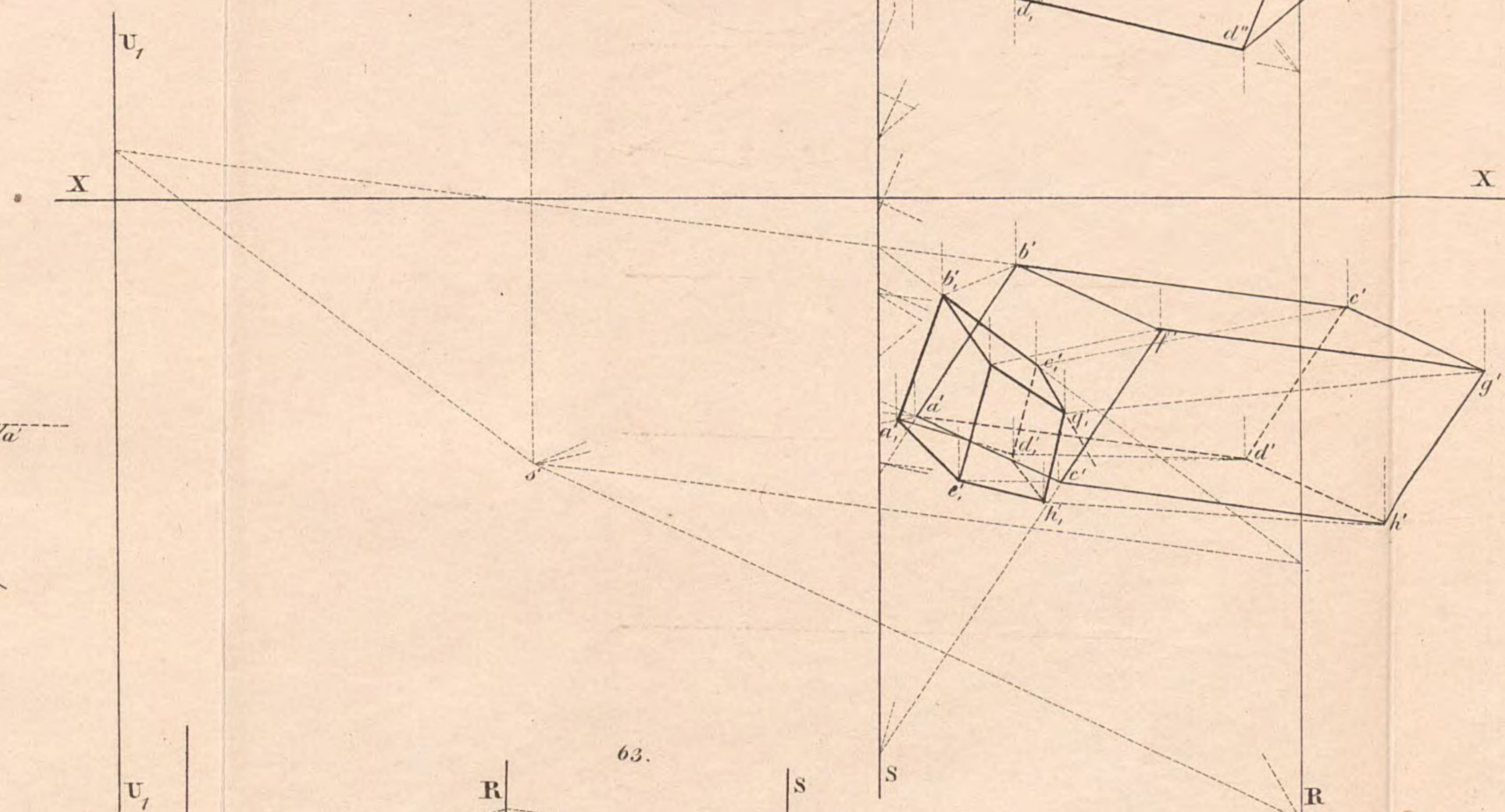
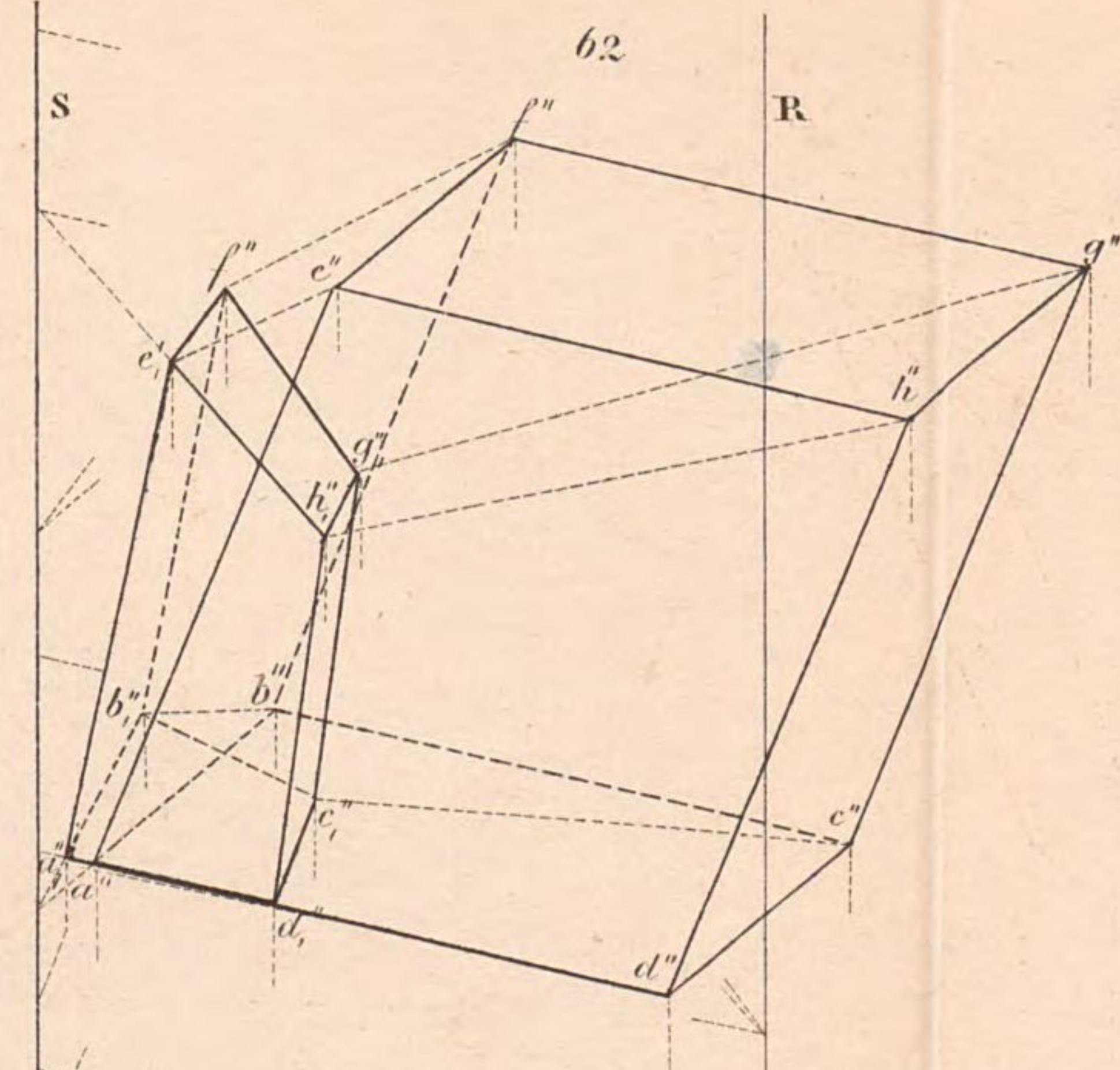
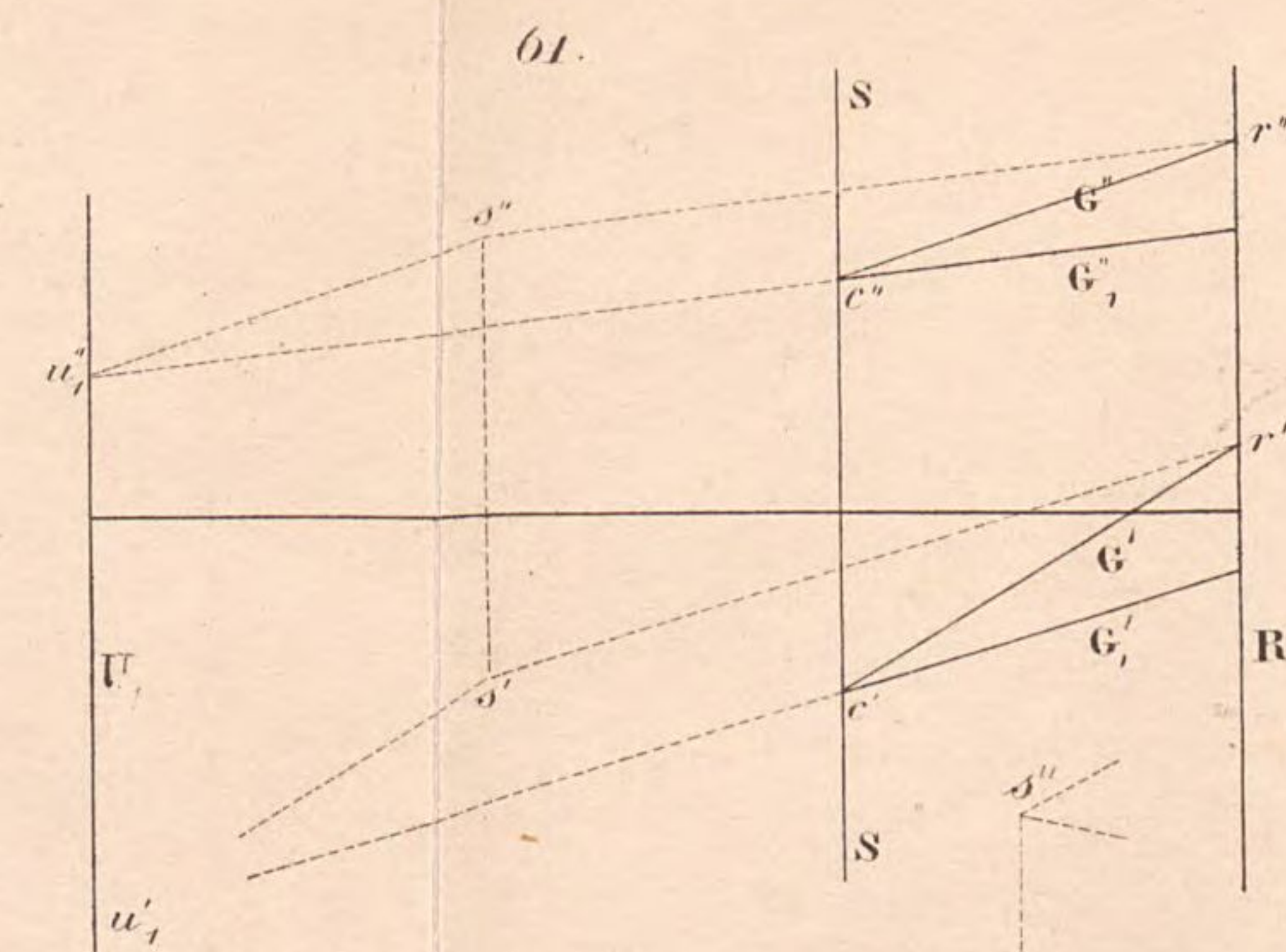
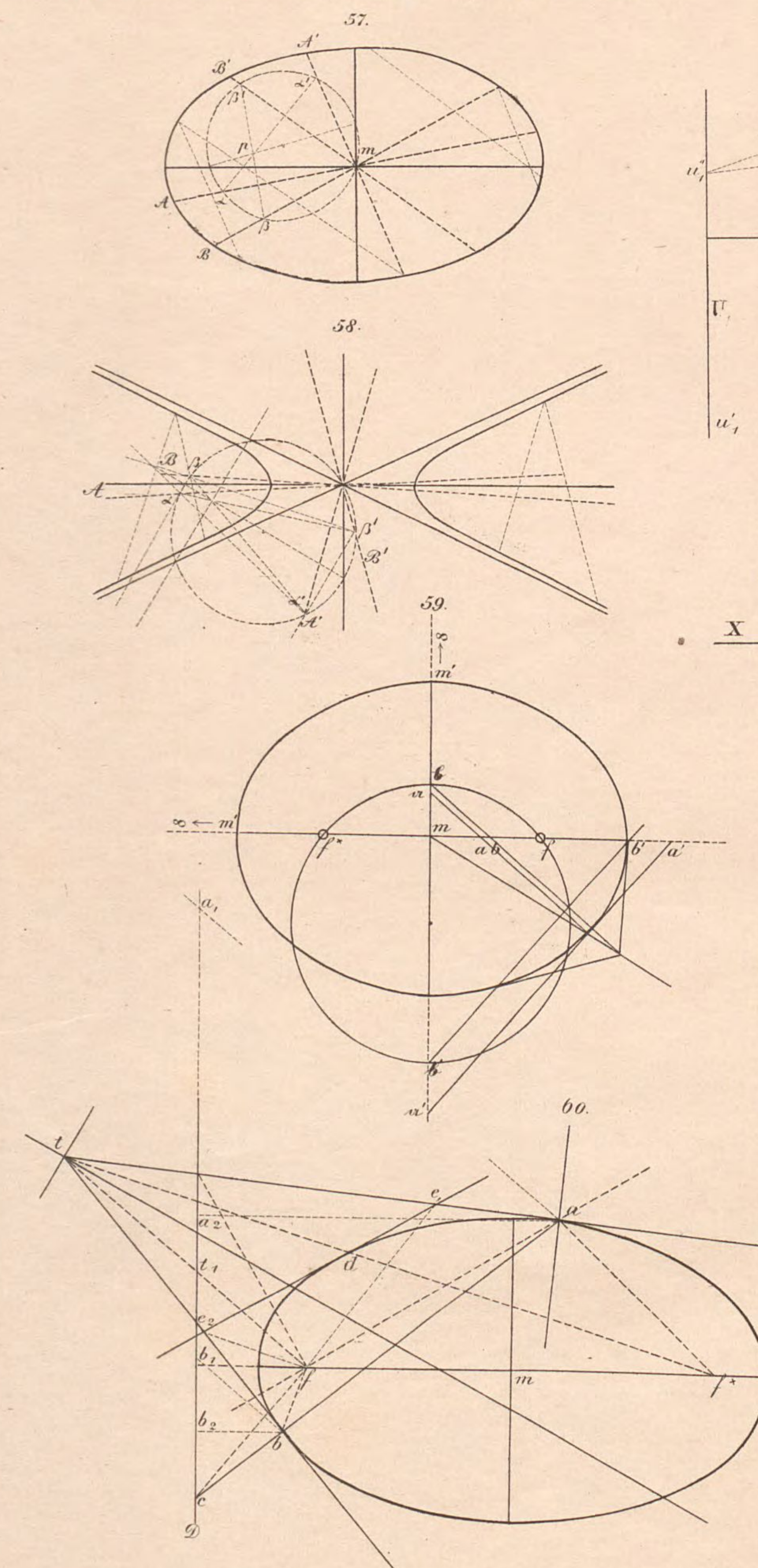
1) Vergl. „Zeitschrift für Mathematik und Physik“, Bd. VIII, p. 495; Bd. IX, p. 335.



Antor gez. Polzer lith.



A. d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei.



Fiedler, Wilhelm

Die Methodik der darstellenden Geometrie zugleich als Einleitung in die Geometrie der Lage Mit 3 Tafeln. (Aus d. 55. Bd. d. Sitzb. d. K. Akad. d. Wiss. II. Abth. Maiheft. 1867.)

(Wien) (1867)

Math.p. 145 ub

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081779-9